南辕北辙的启示

你听说过南辕北辙的故事吗？

这个故事说的是我国春秋战国时代的事：有一个人要到楚国去，他的车很结实，马跑得很快，准备了足够的钱和充足的食物，每天从早到晚拼命赶路，为的是能早一天到达楚国.

可是，他不但没能够到达楚国，反而离楚国越来越远.

你猜猜为什么？

答案很简单：楚国在南方，可是他却拼命往北方走！

这个故事说明，要达到一个目标，不但要拼命努力，更重要的是方向要正确．方向错了，走得越快离目标越远.

数学是在认识和改造现实世界的过程中产生的．现实世界中，万物皆动．因此需要描述运动过程中物体位置的变化.

从南辕北辙的故事可以知道，要描述一个运动物体位置的变化，除了要指明所走的距离，还必须指明运动的方向.

比如一艘船从某个码头出发，行驶了 200 km，你能确定它的位置吗？不能．为了确定它的位置，需要知道它朝什么方向行驶了 200 km.

假如一艘船从某个码头出发，先行驶了 200 km，

又行驶了 300 km，它与码头的距离是 500 km 吗？不见得．如果它先朝南 200 km，再朝北（或朝东，或朝东北）300 km 呢？两次运动“加起来”，离码头的距离就不是 500 km．到底是多少千米？你不妨先自己想一想，试一试．

由此可见，要表示位置的变化，仅仅知道运动的距离是不够的，还必须考虑运动的方向．既考虑距离，也考虑方向的量叫作向量．位置的变化要用向量来描述．

你在初中已经学过一些几何知识．几何是研究图形的性质的．图形是由点构成的．只要知道了图形的每一点（或者一些关键点）的位置，就知道了这个图形的形状和位置．怎样描述每个点的位置？首先要取一个已知点作为基准点，也就是我们通常所说的原点．只要说清楚了从原点到每一个点的方向、距离，就说清楚了这个点的位置．原点到这个点的方向和距离可以用一个向量来表示，这个向量也就表示了这个点的位置．将每个关键点的位置都用向量来表示，就将这个图形描述清楚了．将这些向量进行适当的运算，就好像我们对实数进行加、减、乘运算，或者对代数式进行展开和合并一样，可以算出几何图形的性质．你在以前是用推理的方法研究几何，而向量可以帮助你用计算的方法、代数的方法来研究几何．你愿意接受它的帮助吗？

物体的运动，有平动、有转动．平动用位置的变化来描述，转动通过方向的变化来描述．

转动过程中方向的变化可以用角来度量．

在初中你已经学习了 0° 到 360° 的角．但物体的转

动不受 $360°$ 的限制，可以无止境地转动下去，产生任意大小的角，也可以向相反的方向转动，产生小于 $0°$ 的角.

在转动过程中，转动物体上的点的坐标随着角的改变而变化. 坐标的变化与角的变化之间的关系，用三角函数来描述.

物体的转动具有周期性，转动物体上点的位置随着角的增加周而复始地变化. 因此三角函数具有周期性，是处理周期现象的重要数学工具.

既然向量和三角函数是为了解决现实世界中的问题而产生的，学习它们的最好途径就是自己尝试去解决这些问题，为此，应设法找出适当的工具和方法，也就是尝试自己把这部分知识重新发明（探索）一遍. 这不但是学习本书的好方法，也是学习任何知识的好方法. 沿着这个正确方向努力前进，哪怕前进得慢一些，总会一步步向目标接近.

在信息技术飞速发展的今天，学习和研究数学不再仅仅靠纸和笔，计算机及其软件成为了我们的好帮手. 本书安排了一些数学实验，教你在计算机的帮助下，通过观察美丽的图形，体会电子琴为什么能模拟出不同乐器的声音，体会光的干涉原理. 你喜欢吗?

学好数学需要付出艰苦的努力，同时又能从数学的真和美中享受到快乐. 让我们一起来努力，在艰苦和快乐中前进吧!

主　　编　张景中　黄楚芳
执行主编　李尚志

本册主编　李尚志
编　　委　郑志明　查建国　贺仁亮
　　　　　罗培基

目录

第3章 三角函数

第4章　向　量

第3章 三角函数

东升西落照苍穹，
影短影长角不同.
昼夜循环潮起伏，
冬春更替草枯荣.

转动是重要的运动形式，与周期现象密切相关.

三角函数刻画了平面上转动过程中点的位置变化规律，是研究周期现象的重要数学模型.

数学建模

怎样度量平面上的转动

转动导致方向的变化.

平面上的转动都有一个转动中心 O，它是转动过程中唯一不动的点，其余所有的点都围绕这个中心转动.

$\angle AOB$ 的大小怎样量？

转动中心 O 之外的一个点 A 处于 O 的某个方向上，这个方向由射线 OA 代表. 在转动过程中，射线 OA 绕 O 旋转到射线 OB，射线所指的方向就发生变化，由原来射线 OA 的方向变到射线 OB 的方向，形成$\angle AOB$.

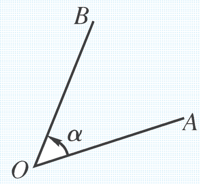


图 3-1

这个角的大小就度量了转动的“大小”，也度量了从射线 OA 到 OB 方向的改变的“大小”.

连续几天观察月亮升起的时间，看它转一圈是不是 24 h.

转动是可以循环和周而复始的. 一种最自然、最容易想到的描述转动的方式就是看它转了多少圈. 角的始边 OA 经过转动之后第一次回到原来位置，就称为转动了一周，这样产生的角称为周角. 如果重复原来的历程继续旋转，再次回到原来位置，就是周角的 2 倍. 反过来，也可能还没有转到一周就停止转动了，则可以考虑它转了一周的几分之几.

始边转半周形成什么角？转 $\frac{1}{4}$ 周形成什么角？

将周角分成 360 等份，用“周”的$\frac{1}{360}$作为度量单位，称为**度**(degree). 1 度的角记作 1°. 一个角是 1°的多少倍，就称这个角是多少度的角. 这样来度量角的大小的方式称为**角度制**（degree measure).

这样，周角的大小就是 360 度，记作 360°. 周角的一半就是 180°，称为**平角**（straight angle). 平角的一半也就是周角的$\frac{1}{4}$，

称为**直角**（right angle），就是 90°.

为了更精确地度量角的大小，还将 1° 的 $\frac{1}{60}$ 作为更小的单位，称为“分”，1 分的角记作 $1'$. 同时还将 $1'$ 的 $\frac{1}{60}$ 称为“秒”，1 秒的角记作 $1''$.

也可以不用“周”或它的 $\frac{1}{360}$ 来度量转动与角，而直接用转动图形上的点在转动过程中走的路程来度量. 对于角来说，就是用它的始边 OA 上的点在转动过程中所走的路程来度量. 但这有一个问题：始边 OA 上不同的点在转动过程中虽然转过的圈数都是相同的，但所走的路程却不同，离转动中心 O 越远，走的路程就越远. 试一试，你能不能想个办法解决这个问题，创造出另外一种度量角的大小的方法？

想不出来也不要紧，在下面的课程中我们一起来研究.

3.1 弧度制与任意角

万物皆变，万物皆动.

有平动，有转动.

平动改变位置，转动改变方向.

平动量距离，转动量什么?

3.1.1 角的概念的推广

在初中数学中，我们已经会用角度来量 0°到 360°的角.

转动超过一圈，角度就超过 360°.

既然角是描述转动的，是由转动产生的，就可能不只转动一圈而可能转很多圈. 比如，时钟的分针每小时转一圈，一天 24 小时就转 24 圈. 行驶的汽车、火车的车轮，它们显然都不能只旋转一圈，而要旋转很多圈. 每旋转 1 圈的角是 360°，2 圈就是 360°的 2 倍，1.5 圈就是 360°的 1.5 倍，等等.

例 1 时钟的分针每小时转 1 圈，时针每 12 h 转 1 圈. 问：

每经过 16 h，分针旋转的角度是多少度，时针旋转的角度是多少度?

解 分针每小时转 360°，16 h 转 $360^{\circ}\times 16=5\,760^{\circ}$.

时针每小时转 $360^{\circ}\div 12=30^{\circ}$，16 h 转 $30^{\circ}\times 16=480^{\circ}$.

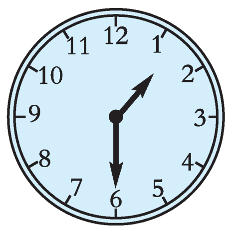


图 3-2

平面上的旋转有两个相反的旋转方向：顺时针方向和逆时针方向. 为了区别我们通常规定：

一条射线绕着端点以逆时针方向的旋转为正向，所成的角称为正角，用正的角度来表示；顺时针方向旋转所成的角称为负角，用负的角度来表示；不旋转所成的角称为零角，用 0°表示.

规定了一个旋转方向为正，与它相反方向旋转的角度就为负.

如果在平面上建立了直角坐标系，使角的顶点与坐标原点重合，

角的始边与 x 轴的非负半轴重合，那么，我们规定：角的终边（除端点外）落在第几象限，就说这个角是第几象限角.

例 2 如图 3-3，设在平面上以 O 为原点建立了直角坐标系，OX，OX'分别是 x 轴的非负半轴和非正半轴，OY，OY'分别是 y 轴的非负半轴和非正半轴. 写出：

（1）由 OX 沿逆时针方向旋转到 OY，OX'，OY'所成的角度；

（2）由 OX 沿顺时针方向旋转到 OY，OX'，OY'所成的角度.

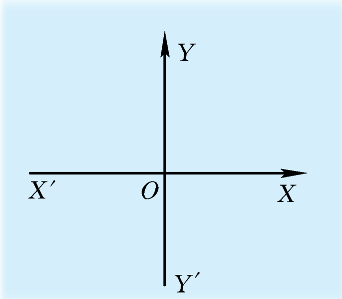


图 3-3

解 （1）所成角度分别为 90°，180°，270°；

（2）所成角度分别为－270°，－180°，－90°.

例 3 设在平面上建立了直角坐标系，使角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合. 试确定下列各角分别是第几象限角.

（1）1 700°；（2）－820°.

解 （1）1 700 除以 360 商 4 余 260，因此 1 700°＝4×360°＋260°.

也就是说，从角的始边 Ox 逆时针旋转到终边 OP，在旋转了 4 整圈之后再旋转 260°. 始边 Ox 每旋转 1 圈（360°）之后就回到原来的位置 Ox，旋转了 4 圈（4×360°）之后仍然回到初始位置 Ox，然后再从这个位置旋转 260°到达终边所在的位置 OP，如图 3-4（a）. 因此，以 Ox 为始边的 1 700°角与 260°角的终边位置相同，均为第三象限角.

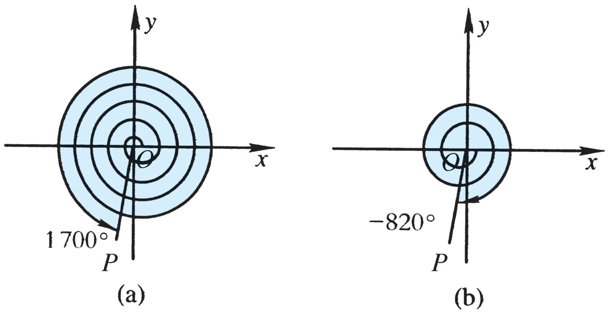


图 3-4

（2）$2\times360^\circ<820^\circ<3\times360^\circ$，故$(-2)\times360^\circ>-820^\circ>(-3)\times360^\circ$，$-820^\circ=(-3)\times360^\circ+260^\circ$.

判断角所在的象限，只管终边位置，不计较旋转过程.

由始边 Ox 顺时针旋转 820° 到终边 OP，可以先顺时针旋转 3 圈回到原来的位置 Ox，再由 Ox 逆时针旋转 260° 到终边 OP 的位置. 因此，以 Ox 为始边的 -820° 角与 260° 角的终边位置相同，如图 3-4（b），也均为第三象限角.

一般地，设 k 是任意的整数，α 是任意角，如果角 $\beta=k\cdot360^\circ+\alpha$ 的始边与 α 的始边相同，则它们的终边也相同.

如果考虑旋转的过程，则 α 与 $k\cdot360^\circ+\alpha$ 是不同的角，相差 k 圈. 但如果只考虑旋转的结果而不考虑过程，也就是说只考虑终边与始边的相对位置，如果角 α 与 $k\cdot360^\circ+\alpha$ 的始边重合，则它们的终边也重合.

设角 $\alpha=\angle AOB$，则所有以 OA 为始边，OB 为终边的角都是 α 与整数个周角的和，组成集合

$$S=\{\beta\mid\beta=\alpha+k\cdot360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

为了表示平面上点的位置，我们可以在平面上建立直角坐标系，以每一点 P 的坐标(x, y)来表示这个点 P 的位置，实际上是表示点 P 相对于原点 O 的位置. 但在实际应用中，有的时候要从点 O 测量点 P 的坐标并不容易，而测定原点 O 到点 P 的方向和距离更容易一些. 点 O 到点 P 的距离可以用线段 OP 的长度来表示. 但怎样表示 OP 的方向呢？可以取 x 轴的非负半轴 Ox 旋转到射线 OP 所成的 $\angle xOP$ 来表示. 从 Ox 旋转到 OP 的 $\angle xOP$ 不只一个，而是无穷多个，它们相互之间相差周角的整数倍. 但如果我们不关心旋转过程只关心 OP 的方向，可以规定选取 $\angle xOP$ 在范围$[0^\circ, 360^\circ)$之内. 对于不在这个范围内的 $\angle xOP$，可以将它加减 360° 的适当的整数倍化为这个范围内的角.

我们约定：将角置于平面坐标系中时，如果没有特别指明角的始边，就是说这个角的始边与 x 轴的非负半轴重合.

例 4 在区间$[0^\circ, 360^\circ)$内找出与下列角的始边和终边相同的角 α：

（1）$1\,700^\circ24'$；　　（2）$-819^\circ36'$.

解 （1）$\alpha=1\ 700°24'-4\times360°=260°24'$；

（2）$\alpha=-819°36'+3\times360°=260°24'$.

例 5 试写出顶点与原点重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，角的终边落在 y 轴非负半轴上的角的集合.

解 ∵ $\angle xOy=90°$，

∴ 所有这些角的集合为 $\{\beta \mid \beta=90°+k\cdot360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

练习

1. “第一象限角是锐角”这句话对吗？请说明理由.
2. 已知角的顶点与直角坐标系的原点 O 重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，试作出下列各角并指出它们是第几象限角.

   （1）$30°$；（2）$120°$；（3）$-120°$；（4）$420°$；

   （5）$13\ 290°$；（6）$-45°$；（7）$-210°$；（8）$-1\ 300°$.
3. 指出第 2 题中的角在 $[0°,360°)$ 内与它终边相同的角分别是多少.

3.1.2 弧度制

例 1 如图 3-5，设线段 OA 的长度为 1. 绕端点 O 旋转角 α 到 OB，旋转过程中 A 经过的路线是从 A 到 B 的一段圆弧 $\overset{\frown}{AB}$.

（1）当 $\alpha=1°$ 或 $\alpha=n°$ 时，圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度是多少？

（2）当圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 长度为 1 时，α 等于多少度？

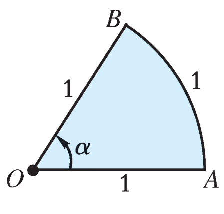


图 3-5

这段圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度与角 α 的大小成正比，可以用来度量角 α 的大小.

解 （1）当 $\alpha=360°$ 时，圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 就是以 $OA=1$ 为半径的圆周，长度为 2π.

当 $\alpha=1°$ 时，圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度等于圆周长 2π 的 $\frac{1}{360}$，为

$$\frac{2\pi}{360}=\frac{\pi}{180};$$

当 $\alpha=n^\circ$时，圆弧$\overset{\frown}{AB}$的长度等于$\frac{\pi}{180}$的 n 倍，为$\frac{n\pi}{180}$.

（2）设当 $\alpha=n^\circ$时圆弧$\overset{\frown}{AB}$的长度为 1，即

$\frac{n\pi}{180}=1$，从而

$$n=\frac{180}{\pi}\approx 57.30，\alpha\approx 57.30^\circ\approx 57^\circ 18'.$$

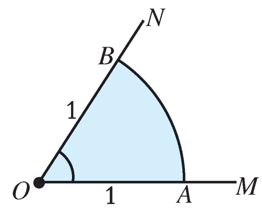


图 3-6

除了角度制，还有另外一种常用的方式来度量角：如图 3-6，在$\angle MON$ 的始边 OM 上取点 A 使 OA 的长度等于 1，用从 OM 到 ON 旋转过程中 A 所经过的圆弧$\overset{\frown}{AB}$的长度来度量角$\angle MON$（也就是$\angle AOB$）的大小．在旋转过程中，A 所画出的圆弧$\overset{\frown}{AB}$是以角的顶点为圆心、半径为 1 的圆的一部分，$\angle AOB$ 就是这段圆弧$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角．半径为 1 的圆称为**单位圆**（unit disk）．因此，上述这种方式就是用单位圆中的弧长来度量所对圆心角的大小，单位圆上长度为 1 的圆弧所对的圆心角取为度量的单位，称作**弧度**（radian）．这样的单位制称为**弧度制**（radian measure）．

按照例 1 的计算结果，

$$1\text{ 弧度}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\approx 57^\circ 18',$$

$$\text{周角}=360^\circ=2\pi\text{ 弧度},$$

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\approx 0.01745\text{ 弧度}.$$

上面这三个等式就是**角度与弧度两种单位制之间的换算公式**.

角度制与弧度制都是度量角的大小的单位制，只不过度量单位的大小不同：

角度制以周角的$\frac{1}{360}$作为度量单位，称为“度”；弧度制以周角的$\frac{1}{2\pi}$作为度量单位，称为“弧度”.

为什么在角度制之外还要引入弧度制？为什么在科学研究中更偏向于使用弧度制而不偏向于使用角度制？这是因为弧度制能使微积分中的有关公式特别简单．等你以后学了高等数学就会知道了.

以上以单位圆周上的弧 AB 的长来度量它所对的圆心角$\angle AOB$，得到的还只是$\angle AOB$ 的弧度数的绝对值．与角度制类似，在弧度制中我们也将沿逆时针方向转动所成的角定为正角，弧度数为正；沿顺时针方向转动所成的角定为负角，弧度数为负；如果始边没有旋转，

所成的角为零角，弧度数为 0.

在科学应用中，用弧度制表示角的时候，单位“弧度”通常略去不写：比如写 $\alpha=1$ 表示 α 是 1 弧度的角，即 $\alpha\approx57^\circ18'$；$\alpha=2\pi$ 则表示 $\alpha=2\pi$ 弧度，即 α 是周角. 因此，当直接用一个实数来表示角的时候，一定是指的这个角的弧度数.

为什么可以将“弧度”略去？在下面的例 2 中可以知道其中的理由.

但需特别注意：用角度制表示角时，单位一定不能省略，如将 $\alpha=30^\circ$ 写成 $\alpha=30$，就变成 $\alpha=30$ 弧度 $\approx30\times57^\circ18'$，与 $\alpha=30^\circ$ 相差悬殊.

例 2 如图 3-7，在半径为 r 的圆中，设圆心角 $\alpha=\angle AOB$ 所对的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度为 l，扇形面积记为 S.

（1）已知 $\alpha=n^\circ$，求 l；

（2）已知 $\alpha=x$ 弧度，求 l 和 S；

（3）已知 l，求 α 的弧度数 x 的绝对值 $|x|$.

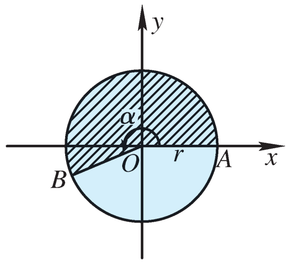


图 3-7

解 半径为 r 的圆周长为 $2\pi r$. 也就是说：周角所对的弧长为 $2\pi r$.

（1）n° 角的大小是周角的 $\dfrac{|n|}{360}$，所对的弧长应是周角所对弧长 $2\pi r$ 的 $\dfrac{|n|}{360}$. 即

$$l=\frac{|n|}{360}\cdot2\pi r=\frac{|n|\pi r}{180}.$$

（2）x 弧度角的大小是周角的 $\dfrac{|x|}{2\pi}$，所对弧长应是周角所对弧长 $2\pi r$ 的 $\dfrac{|x|}{2\pi}$，所形成扇形面积是整个圆的面积 πr^2 的 $\dfrac{|x|}{2\pi}$. 即

$$l=\frac{|x|}{2\pi}\cdot2\pi r=|x|r,$$

$$S=\frac{|x|}{2\pi}\cdot\pi r^2=\frac{1}{2}|x|r^2.$$

求弧长 l 的另一种解法：在圆心角 α 相同的条件下，α 所对的弧长与圆的半径成正比. x 弧度的角在半径为 1 的圆中所对的弧长为 $|x|$，在半径为 r 的圆中所对的弧长应是 $|x|$ 的 r 倍，即

$$l=|x|r.$$

（3）在圆心角 α 相同的条件下，α 所对的弧长与圆的半径成正

比．半径为 r 时弧长为 l，半径为 1 时弧长应为$\frac{l}{r}$，因此，α 的弧度数 x 的大小（即绝对值）

$$|x|=\frac{l}{r}.$$

例 2 的（1），（2）分别得出了由圆的半径 r 及角 α 的角度数 n 和弧度 x 分别计算弧长 l 的公式：

$$l=\frac{|n|\pi r}{180},\quad l=|x|r.$$

以及由 r 和 x 计算扇形面积 S 的公式：

$$S=\frac{1}{2}|x|r^2.$$

由例 2 的（3）可知：不一定要取单位圆来度量圆心角，可以取任意半径 r 的圆，用这个圆的圆心角 α 所对弧长 l 与半径 r 之比$\frac{l}{r}$来度量角度 α，这个比$\frac{l}{r}$的大小也就是 α 的弧度数的大小．

由 $l=|x|r$ 和 $S=\frac{1}{2}|x|r^2$ 两个式子你能推导出 S,l,r 三者之间的关系吗？

弧度数的大小是弧长与半径两个长度之比，应是一个没有单位的数，因此可以将“弧度”这个单位略去．

练习

1．用弧度制写出下列各角：

（1）平角；（2）直角；（3）等边三角形的一个内角；

（4）等腰直角三角形的一个底角；（5）等边三角形的一个外角；

（6）$30°$；（7）$270°$；（8）三角形的外角和．

2．将下表中的角度和弧度互化：

角度	$15°$		$45°$	$60°$			$120°$	$135°$	$150°$				
弧度		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$				$\frac{3\pi}{2}$	1	2	3

3．判断下列各角分别是第几象限角：

（1）$\frac{3\pi}{4}$；（2）$\frac{4\pi}{3}$；（3）-99.9π；（4）-4．

习题 1

学而时习之

1. 时钟的分针经过 2 小时 40 分钟，它转过的角是______度，这个角是第______象限角.

2. 在 $[0°, 360°)$ 内指出与下列各角终边相同的角：

   (1) $1\ 390°$；　(2) $-240°$；　(3) $945°$；　(4) $-900°$.

3. 已知角的顶点与直角坐标系的原点重合，始边与 x 轴非负半轴重合，终边落在 x 轴的非正半轴上. 试写出这些角的集合.

4. 将下列各角化成 $2k\pi+\alpha$ $(k\in \mathbf{Z})$ 且 $0\leqslant\alpha<2\pi$ 的形式，并指出它们是第几象限角.

   (1) $\dfrac{17\pi}{3}$；　(2) $\dfrac{17\pi}{4}$；　(3) $-\dfrac{17\pi}{6}$；　(4) $-\dfrac{9\pi}{5}$.

温故而知新

5. 已知圆周上五个点 A，B，C，D，E 把该圆周分为五段弧，其长度之比为 $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DE}:\overset{\frown}{EA}=1:2:3:4:5$，求五边形 $ABCDE$ 的各个内角的弧度数.

6. 半径为 12 cm 的轮子，以 400 转/min 的速度按顺时针旋转，求：

   (1) 轮沿上某一点 A 每秒转过的弧度数；

   (2) 轮沿上一点 B 在轮子转动 $1\ 000°$时所经过的路程.

问题探索

用方向和距离表示点的位置

我们知道：要表示平面上点的位置，可以在平面上建立直角坐标系，如图 3-8，用点 P 的坐标(x, y)来表示点 P 的位置，实际上是点 P 相对于原点O 的位置．但在实际应用中，很多时候点 P 的坐标(x, y)并不容易测量，而 OP 的方向（用$\angle\alpha=\angle xOP$ 来代表）及点 P 到点 O 的距离 r 更容易测量．而且，通过画图可知，由角 α 和 r 同样可以唯一确定点 P 的位置，因此可以唯一确定点 P 的坐标．

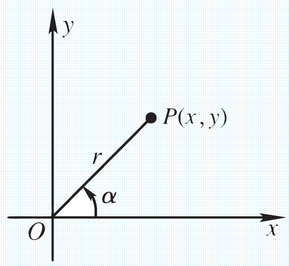


图 3-8

例 1 在平面直角坐标系中，设 O 是原点，Ox 是 x 轴的非负半轴．根据下列条件画出点 P_0，P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 的位置，并度量出它们的坐标．

$$|OP_0|=|OP_1|=|OP_2|=|OP_3|=|OP_4|=|OP_5|=1.$$

$$\angle xOP_0=0,\qquad \angle xOP_1=\frac{\pi}{3},$$

$$\angle xOP_2=\frac{2\pi}{3},\qquad \angle xOP_3=\pi,$$

$$\angle xOP_4=\frac{4\pi}{3},\qquad \angle xOP_5=\frac{5\pi}{3}.$$

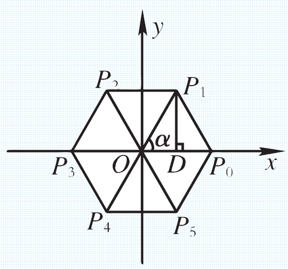


图 3-9

解 各点位置如图 3-9 所示．实际上，它们是以 O 为圆心的单位圆的一个内接正六边形的各个顶点．

请自己画图度量，将度量的结果填入空格中．

度量出各点的坐标为 P_0(__，__)，P_1(__，__)，P_2(__，__)，P_3(__，__)，P_4(__，__)，P_5(__，__)．

例 2 试通过计算得出例 1 中各点的坐标．

解 由$\angle xOP_0=0$及$\angle xOP_3=\pi$知道P_0,P_3分别在x轴的非负半轴和非正半轴上离原点距离为1的位置,坐标分别为(1,0),(−1,0).

过点P_1作平行于y轴的直线交x轴于点D,则$\triangle OP_1D$为直角三角形,$\angle ODP_1$为直角,斜边OP_1长度为1,内角$\alpha=\angle DOP_1=60°$. 由锐角三角函数知

$$\sin\alpha=\frac{|DP_1|}{|OP_1|},\quad \cos\alpha=\frac{|OD|}{|OP_1|},$$

从而

$$|OD|=|OP_1|\cos\alpha=1\times\cos 60°=\frac{1}{2}=0.5,$$

$$|DP_1|=|OP_1|\sin\alpha=1\times\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.866.$$

而$|OD|$,$|DP_1|$分别是点P_1的x坐标和y坐标,故点P_1的坐标为$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\approx(0.5,0.866)$.

点P_2与P_1关于y轴对称,它们的y坐标相同,x坐标互为相反数,故点P_2的坐标为$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\approx(-0.5,0.866)$.

点P_5与P_1关于________对称,故P_5的坐标为____________________________.

请将正确答案填入空格中.

点P_4与P_1关于________对称,故P_4的坐标为____________________________.

假如将已知条件中的$|OP_0|$,$|OP_1|$,$|OP_2|$,$|OP_3|$,$|OP_4|$,$|OP_5|$由等于1改为等于2,其余条件不变,你还会求P_0,P_1,P_2,P_3,P_4,P_5的坐标吗?

3.2 任意角的三角函数

3.2.1 任意角三角函数的定义

一、用比值定义三角函数

在初中数学中我们已经学习了锐角三角函数．如图 3-10，在直角三角形 ABC 中，设$\angle C$ 为直角，角 A，B，C 所对的边的长度分别记为 a，b，c，则

$$\sin A=\frac{a}{c},\quad \cos A=\frac{b}{c},\quad \tan A=\frac{a}{b}.$$

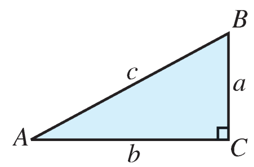


图 3-10

在平面上建立直角坐标系．如图 3-11，设 O 为原点，Ox 是 x 轴的非负半轴．设 α 是以 Ox 为始边的任意角，终边为射线 OM．在 OM 上任取一点 P 不同于原点 O，设点 P 的坐标为（x，y），OP 的长度为 r．

当 α 是锐角，即 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$时，过点 P 作 y 轴的平行线交 x 轴于点 D，则在直角三角形 OPD 中，三边 OP，OD，DP 之长分别为 r，x，y，锐角$\angle DOP=\alpha$．由锐角三角函数的定义有：

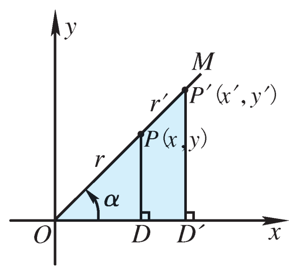


图 3-11

$$\sin \alpha=\frac{y}{r},\quad \cos \alpha=\frac{x}{r},\quad \tan \alpha=\frac{y}{x}.$$

如果在角 α 的终边 OM 上另外取一点 $P'(x', y')$不同于原点 O，设 $|OP'|=r'$，过点 P'作 y 轴的平行线交 x 轴于点 D'，得到直角三角形 $OP'D'$，其三边 OP'，OD'，$D'P'$的长度分别是 r'，x'，y'，则$\triangle OPD$ 与$\triangle OP'D'$相似，对应边成比例：

$$\frac{y}{r}=\frac{y'}{r'},\quad \frac{x}{r}=\frac{x'}{r'},\quad \frac{y}{x}=\frac{y'}{x'}.$$

这说明，只要角 α 即$\angle xOM$ 确定了，无论在这个角的终边上取点 P

还是另外一点 P'，用公式定义出来的 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 都是确定不变的，可见，当 α 变化时，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 是角 α 的函数.

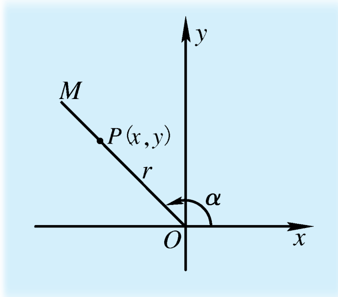


图 3-12

当 α 即 $\angle xOM$ 是任意角时，如图 3-12，我们也同样地在角 α 的终边 OM 上任取一点 P 与点 O 不相同，利用 OP 的长度 r 及 P 的坐标 $(x,\ y)$ 定义：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\qquad \cos\alpha=\frac{x}{r},\qquad \tan\alpha=\frac{y}{x} \qquad ①$$

分别称为角 α 的**正弦**(sine)、**余弦**(cosine)、**正切**(tangent).

注意 1. 不论 α 是什么角，由于点 P 不同于原点，总有 $r>0$，因此 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 总是有意义.

2. 当 OM 在 y 轴上，也就是 $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$) 时，$x=0$，$\frac{y}{x}$ 无意义. 因此 $\tan\alpha$ 只在 α 不属于集合 $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbf{Z}\right\}$ 时有意义.

3. 只要 α 即 $\angle xOM$ 确定了，公式①中的 3 个比值就确定了，并不随着点 P 在 OM 上的不同选取而变化，所定义出来的函数的确是 α 的函数.

将公式①中定义函数 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的 3 个比值 $\frac{y}{r}$，$\frac{x}{r}$，$\frac{y}{x}$ 的分子、分母交换，可以定义 α 的另外 3 个三角函数：

$$\cot\alpha=\frac{x}{y},\qquad \sec\alpha=\frac{r}{x},\qquad \csc\alpha=\frac{r}{y}$$

分别称为角 α 的**余切** (cotangent)、**正割** (secant)、**余割**(cosecant). 容易看出，当角 α 的正弦、余弦、正切为非零实数时，余割、正割、余切分别是它们的倒数. 因此，使用余切、正割、余割的意义并不大，使用正弦、余弦、正切通常就足够了.

例 1 如图 3-13，已知角 α 的终边经过点 $P(4,-3)$，求 α 的正弦、余弦、正切函数值.

解 $x=4$，$y=-3$，

$$r=|OP|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5.$$

故 $\sin\alpha=\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5}$， $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，

$\tan\alpha=\frac{-3}{4}=-\frac{3}{4}$.

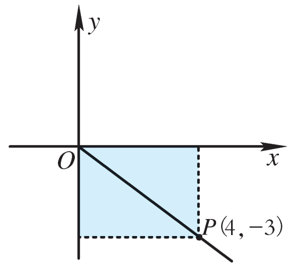


图 3-13

例 2 求 0，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$的正弦、余弦、正切函数值.

解 如图 3-14，在∠xOP 的终边上选取点 P 使 OP 长度为 1，即 $r=1$. 则：

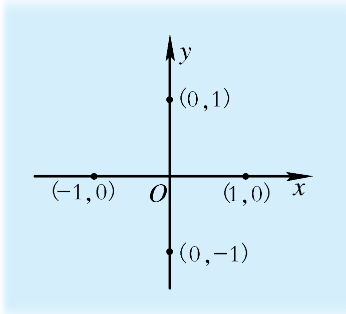


图 3-14

（1）当∠$xOP=0$ 时，点 P 的坐标为 (1，0)，故

$$\sin 0=\frac{0}{1}=0,\quad \cos 0=\frac{1}{1}=1,$$

$$\tan 0=\frac{0}{1}=0.$$

（2）当∠$xOP=\frac{\pi}{2}$时，点 P 的坐标为(0，1)，故

$$\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{1}=1,\quad \cos\frac{\pi}{2}=\frac{0}{1}=0,\quad \tan\frac{\pi}{2}\text{不存在}.$$

（3）当∠$xOP=\pi$ 时，点 P 的坐标为(−1，0)，故

$$\sin\pi=\frac{0}{1}=0,\quad \cos\pi=\frac{-1}{1}=-1,\quad \tan\pi=\frac{0}{1}=0.$$

（4）当∠$xOP=\frac{3\pi}{2}$时，点 P 的坐标为(0，−1)，故

$$\sin\frac{3\pi}{2}=\frac{-1}{1}=-1,\quad \cos\frac{3\pi}{2}=\frac{0}{1}=0,\quad \tan\frac{3\pi}{2}\text{不存在}.$$

练习

1. 已知角 α 的终边经过点 $P(-12,-5)$，求 α 的正弦、余弦、正切函数值.
2. 利用三角函数的定义求下列各角的正弦、余弦、正切函数值.

（1）$-\frac{\pi}{2}$； （2）$-\pi$； （3）$\frac{\pi}{4}$； （4）$\frac{3\pi}{4}$.

二、用有向线段表示三角函数

在三角函数的定义式中，正弦 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$ 与余弦 $\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$ 的分母都是 r. 如果选取点 P 使它与原点 O 的距离 $r=1$，即让点 P 在单位圆上，则 $x=\cos\alpha$，$y=\sin\alpha$. 而 x，y 都可以作线段来表示. 具体作图方法如下：

设在平面直角坐标系中，O 是原点，Ox 为 x 轴的非负半轴，以 Ox 为始边作角 α，如图 3-15.

观察图 3－15(b)，(c) 中角 α 即 $\angle xOP$ 的正切线 AT，你觉得它是否就是 $\angle xOT=\alpha+\pi$ 的正切线？这说明 $\tan(\alpha+\pi)$ 与 $\tan\alpha$ 有什么关系？

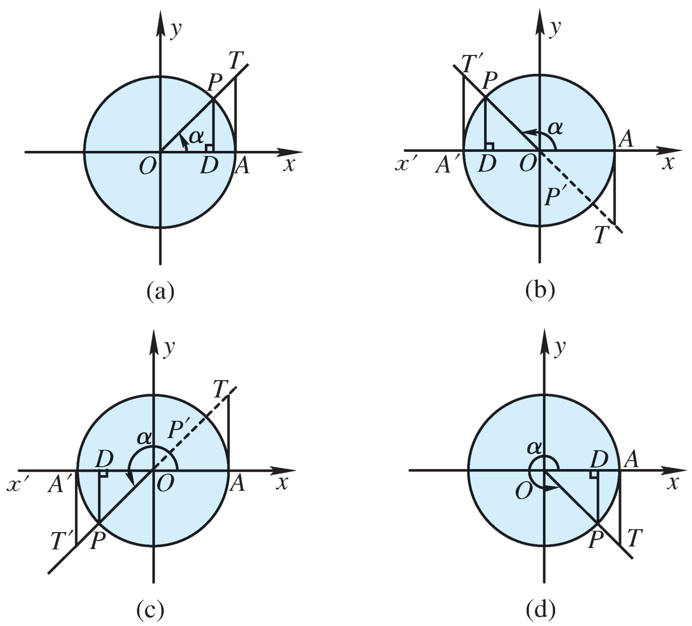


图 3-15

以 O 为圆心作单位圆（半径 $r=1$）与角 α 的终边交于点 P. 设 P 的坐标为 (x,y)，则

$$x=\frac{x}{1}=\cos\alpha,\qquad y=\frac{y}{1}=\sin\alpha.$$

由点 P 的坐标 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 能否算出 $\tan\alpha$？你得到什么结论？

过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 D.

线段 DP 的长度 $|DP|=|y|$. 将 DP 看作有方向的线段，D 为起点，P 为终点：当它指向 y 轴的正方向（此时 $y>0$）时取正实数值 y；当它指向 y 轴的负方向（此时 $y<0$）时取负实数值 y；当它的长度为零（此时 $y=0$）时，取零值. 在所有的情况下都有

的交点，如图 3-15(b),(c). 此时过单位圆与 x 轴的非正半轴 Ox' 的交点 A' 作单位圆的切线交 OP 于点 T'，则点 T' 是点 T 关于原点 O 的中心对称点，其两个坐标分别是 $T(1,y_1)$ 的两个坐标的相反数，即点 T' 的坐标为 $(-1,-y_1)$. 由正切函数的定义知 $\tan\alpha=\frac{-y_1}{-1}=y_1$.

因此，只要 $\tan\alpha$ 存在，则上述与单位圆相切的有向线段 AT 代表的实数就是 $\tan\alpha$，AT 称为角 α 的**正切线**（tangent line）.

例 3 利用正弦线、余弦线、正切线研究各象限内角的三角函数的符号.

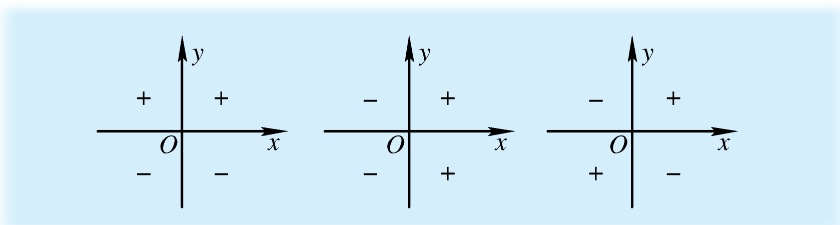
解 观察图 3-15（a)，（b)，（c)，（d）中各象限角的三角函数线，可知：

第一、二象限角的正弦线 DP 为正向，正弦值为正；第三、四象限角的正弦线 DP 为负向，正弦值为负.

第一、四象限角的余弦线 OD 为正向，余弦值为正；第二、三象限角的余弦线 OD 为负向，余弦值为负.

第一、三象限角的正切线 AT 为正向，正切值为正；第二、四象限角的正切线 AT 为负向，正切值为负.

例 3 求出的各三角函数在各象限内的符号可用图 3-16 来直观表示：



$\sin\alpha$ (a)　$\cos\alpha$ (b)　$\tan\alpha$ (c)

图 3-16

练 习

1. 作出下列各角的正弦线、余弦线、正切线.

(1) $\frac{\pi}{4}$；　(2) $\frac{2\pi}{3}$；　(3) $\frac{7\pi}{6}$；　(4) $-\frac{\pi}{3}$.

2. 试判断下列各式的值的符号.

（1） $\sin\frac{4\pi}{3}$；（2） $\cos 3$；

（3） $\tan\frac{13\pi}{6}$；（4） $\sin\frac{5\pi}{3}\cdot\cos\frac{5\pi}{3}$.

3.2.2 同角三角函数之间的关系

我们给一个角 α 定义了正弦、余弦、正切 3 种三角函数．从定义中可以看出这些函数是相互关联的，我们希望由其中一个函数可以计算出其他函数的值.

为此我们需找出同一个角的正弦、余弦、正切的关系式.

如图 3-17，设 $\alpha=\angle xOM$ 是任意角．以点 O 为圆心作单位圆与角 α 的终边交于点 P，并作角 α 的正弦线 DP 和余弦线 OD．则在 Rt△OPD 中，由勾股定理得

$$|DP|^2+|OD|^2=|OP|^2.$$

将 $DP=\sin\alpha$，$OD=\cos\alpha$ 及 $|OP|=1$ 代入得

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

又由角 α 的终边 OP 上点 P 的坐标$(\cos\alpha,\sin\alpha)$及正切函数的定义得：当 $\cos\alpha\neq 0$ 时，有

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

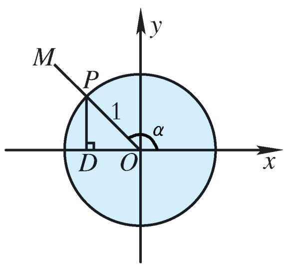


图 3-17

这就得到了 α 的正弦、余弦、正切之间的基本关系式：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

例 1 已知 $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$，并且 α 是第四象限角，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$.

解 由 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 之间的关系式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 及第四象限角的余弦 $\cos\alpha>0$ 得

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13},$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{5}{13}\times\frac{13}{12}=-\frac{5}{12}.$$

例 2 已知 $\tan\alpha=k$，且角 α 在第三象限，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$.

解 由角 α 在第三象限知：$\sin\alpha<0$，$\cos\alpha<0$.

由 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha=k$，得 $\sin\alpha=k\cos\alpha$，代入

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

得

$$k^2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\qquad \cos^2\alpha=\frac{1}{k^2+1},$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{k^2+1}},\qquad \sin\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}.$$

例 3 求证：$1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

证明 $1+\tan^2\alpha=1+\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2$

$$=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

由例 3 的结果可以得出例 2 的另一种解法：

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+k^2},$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$\sin\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

例 4 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，求 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ 的值.

解 因 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，两边平方，得 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\dfrac{1}{25}$.

即 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{1}{25}$.

将 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 代入，得

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{25}-1\right)=-\frac{12}{25}.$$

练习

1. 已知 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，且 α 是第四象限角，求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$.

2. 已知 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$.

3. 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$.

4. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，求 $\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}$ 的值.

3.2.3 诱导公式

在初中我们学习过锐角三角函数，而且会用计算器或查三角函数表得到锐角三角函数值. 现在我们又定义了任意角 α 的三角函数，那么怎样计算任意角的三角函数呢？我们希望可以将任意角的三角函数化为 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 范围内的角的三角函数来计算.

由三角函数的定义可以知道：以直角坐标系中 x 轴的非负半轴 Ox 为始边的角 α 的各三角函数值，完全由角 α 的终边 OP 的位置决定，而与从 Ox 旋转到 OP 所经过的圈数无关. 也就是说：

终边相同的角的三角函数值也相同.

由于与角 α 终边相同的角 β 之间相差周角 2π 的整数倍 $2k\pi$，具有形式 $\beta=\alpha+2k\pi$，其中 $k\in\mathbf{Z}$，因此我们有

α 与 $\alpha+2k\pi$ 的同名三角函数值相等：

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$$

$$\tan(\alpha+2k\pi)=\tan\alpha$$

其中 $k\in\mathbf{Z}$

对任意角 α 可适当选取整数 k，使 $\beta=\alpha+2k\pi$ 在区间 $[0,2\pi)$ 的范围内，而角 α 的三角函数可化为在区间 $[0,2\pi)$ 中的角 β 的三角函数来求.

通过前面的学习我们可以看到：终边落在其他象限的角 α 的三角函数的绝对值可以化为锐角三角函数来求，再添上适当的符号就可以得到角 α 的三角函数. 按照这个思路可以将任意角的三角函数化为 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ 范围内的角的三角函数来计算.

例 1　求下列三角函数值：

(1) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$；　(2) $\tan\dfrac{5\pi}{4}$；　(3) $\cos\dfrac{2\pi}{3}$.

先观察图中 $-\dfrac{\pi}{6}$ 与 $\dfrac{\pi}{6}$ 的终边、$\dfrac{5\pi}{4}$ 与 $\dfrac{\pi}{4}$ 的终边、$\dfrac{2\pi}{3}$ 与 $\dfrac{\pi}{3}$ 的终边的位置关系.

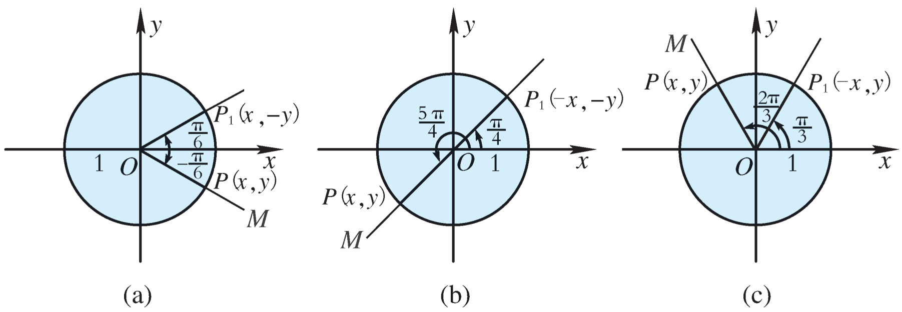


图 3-18

解　如图 3-18(a)，(b)，(c)，在 $\angle xOM$ 的终边 OM 上取点 $P(x,\ y)$ 使 $|OP|=1$，则

$$\sin\angle xOM=y,\quad \cos\angle xOM=x,\quad \tan\angle xOM=\frac{y}{x}.$$

(1) $\angle xOM=-\dfrac{\pi}{6}$ 在第四象限，$x>0$，$y<0$. 作点 P 关于 x 轴的对称点 $P_1(x,\ -y)$，则 $|OP_1|=1$，$\angle xOP_1=-\angle xOP=\dfrac{\pi}{6}$.

由三角函数的定义可知：$\sin\dfrac{\pi}{6}=-y$，

故有　　$\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=y=-\sin\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{1}{2}$.

(2) $\angle xOM=\dfrac{5\pi}{4}$ 在第三象限，$x<0$，$y<0$. 作点 P 关于原点 O 的对称点 $P_1(-x,\ -y)$，则 $|OP_1|=1$，$\angle xOP_1=\angle xOP-\pi=\dfrac{\pi}{4}$.

由三角函数的定义可知：$\tan\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{-y}{-x}=\dfrac{y}{x}$，

故有 $$\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{y}{x}=\tan\frac{\pi}{4}=1.$$

(3) $\angle xOM=\dfrac{2\pi}{3}$在第二象限，$x<0$，$y>0$. 作点 P 关于 y 轴的对称点 $P_1(-x,\ y)$，则 $|OP_1|=1$，$\angle xOP_1=\pi-\angle xOP=\dfrac{\pi}{3}$.

由三角函数的定义可知：$\cos\dfrac{\pi}{3}=-x$，

故有 $$\cos\frac{2\pi}{3}=x=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}.$$

例 2 对任意角 α，将 $-\alpha$，$\pi+\alpha$，$\pi-\alpha$ 的三角函数用角 α 的三角函数来表示.

解 在 $\alpha=\angle xOM$ 的终边 OM 上取点 $P(x,y)$ 使 $|OP|=1$，则

$$\sin\alpha=y,\quad \cos\alpha=x,\quad 当\ x\neq 0\ 时，\tan\alpha=\frac{y}{x}.$$

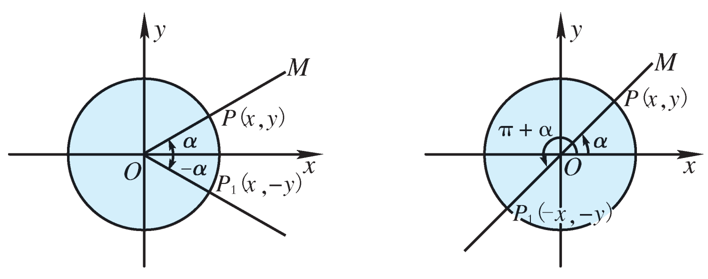
(1) 作点 $P(x,y)$关于 x 轴的对称点 $P_1(x,-y)$，如图 3-19(a)，则

$$|OP_1|=1,\quad \angle xOP_1=-\alpha,$$

$$\sin(-\alpha)=-y=-\sin\alpha,\quad \cos(-\alpha)=x=\cos\alpha,$$

当 $x\neq 0$ 时，$\tan(-\alpha)=\dfrac{-y}{x}=-\dfrac{y}{x}=-\tan\alpha$.

(2) 作点 $P(x,\ y)$关于点 O 的对称点 $P_1(-x,\ -y)$，如图



(a) (b)

图 3-19

3-19 (b)，也就是将 OP 旋转 π 到 OP_1，则 $|OP_1|=1$，$\angle xOP_1=\pi+\alpha$，

$$\sin(\pi+\alpha)=-y=-\sin\alpha,\quad \cos(\pi+\alpha)=-x=-\cos\alpha.$$

当 $x\neq 0$ 时，$\tan(\pi+\alpha)=\dfrac{-y}{-x}=\dfrac{y}{x}=\tan\alpha$.

（3）利用（1），（2）的结果得

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin[\pi+(-\alpha)]=-\sin(-\alpha)=-(-\sin\alpha)=\sin\alpha,$$

$$\cos(\pi-\alpha)=\cos[\pi+(-\alpha)]=-\cos(-\alpha)=-\cos\alpha,$$

$$\tan(\pi-\alpha)=\tan[\pi+(-\alpha)]=\tan(-\alpha)=-\tan\alpha.$$

想一想：$\pi-\alpha$ 的终边与 α 的终边有什么关系？

例 2 得到的结果可以作为公式来使用.

例 3 利用例 2 得到的公式重新求例 1 中各三角函数值：

（1）$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$；（2）$\tan\frac{5\pi}{4}$；（3）$\cos\frac{2\pi}{3}$.

解 （1）$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$.

（2）$\tan\frac{5\pi}{4}=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$.

（3）$\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

也可以利用三角函数线来推出例 2 的公式.

例 4 利用三角函数线将 $-\alpha$ 的三角函数用 α 的三角函数来表示.

解 将 $\alpha=\angle xOP$ 的终边 OP 及其正弦线 DP、余弦线 OD、正切线 AT 关于 x 轴作轴对称，设 OP，DP，OD，AT 的轴对称图形分别是 OP_1，DP_1，OD，AT_1，如图3-20.

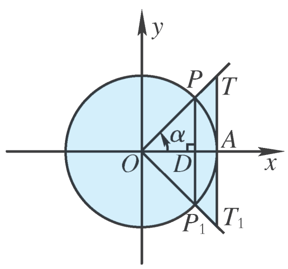


图 3-20

则 $\angle xOP_1=-\angle xOP=-\alpha$，$DP_1$，$OD$，$AT_1$ 分别是 $-\alpha$ 的正弦线、余弦线、正切线，且 $DP_1=-DP$，$AT_1=-AT$. 故得

$$\sin(-\alpha)=DP_1=-DP=-\sin\alpha,$$

$$\cos(-\alpha)=OD=\cos\alpha,$$

$$\tan(-\alpha)=AT_1=-AT=-\tan\alpha.$$

请尝试自己利用三角函数线研究 $\pi\pm\alpha$ 与 α 之间的三角函数的关系.

为了使用方便，我们将例 2 得到的公式总结如下：

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$

以上关于角 α 与 $-\alpha$，$\pi\pm\alpha$ 的三角函数的关系以及前面关于角 α 与 $2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 的三角函数的关系的公式，都称为**诱导公式**(induction formula).

诱导公式很多，不容易记住. 但仔细观察可以发现它们的规律：

(1) 它们都是讲任意一个角 α 与角 $k\pi\pm\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 的三角函数之间的关系.

(2) $k\pi\pm\alpha$ 的三角函数值与角 α 的同名函数值或者相等，或者互为相反数.

(3) 如何判断 $k\pi\pm\alpha$ 的三角函数值与角 α 的同名函数值是相等还是互为相反数？只要在 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ 情况下根据 $k\pi\pm\alpha$ 所在象限判断 $k\pi\pm\alpha$ 的这个三角函数值应取正号还是取负号，将符号添加到角 α 的同名函数值前面（当函数值为 0 时不需要添符号），则添加的这个符号在 α 是其余的角时也正确.

因此，以上众多的诱导公式不需要死记硬背，只需简单概括为如下的法则就够用了：

$k\pi\pm\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 的三角函数值，等于角 α 的同名函数值，前面添上一个把角 α 看成锐角时原来函数值的符号.

这个法则可总结为口诀："函数名不变，符号看象限."

"符号看象限"是说根据 α 为锐角时 $k\pi\pm\alpha$ 所在象限判断符号.

例 5 求下列三角函数值：

(1) $\sin 99.5\pi$；　　(2) $\tan(-3\ 700°)$.

解 (1) $\sin 99.5\pi=\sin(50\times 2\pi-0.5\pi)$

$=\sin(-0.5\pi)$

$=-\sin\dfrac{\pi}{2}=-1.$

（2）$\tan(-3\ 700°)=\tan(11\times360°-3\ 700°)$

$=\tan 260°=\tan(180°+80°)$

$=\tan 80°\approx5.671\ 3.$

在初中数学中讲锐角三角函数时，曾经根据直角三角形两锐角互余的关系得出了锐角 α 与它的余角 $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ 的三角函数之间的关系：

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$$

这样的关系式是否对任意角 α 成立呢？

例 6 对任意角 α，将 $\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$ 的正弦、余弦用 α 的三角函数表示.

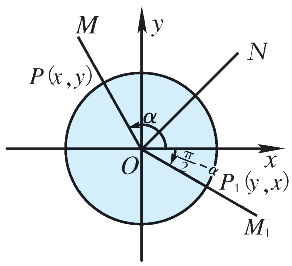


图 3-21

解 如图 3-21，由于角 α 与角 $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ 的平均值 $\dfrac{1}{2}\left[\alpha+\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=\dfrac{\pi}{4}$，角 α 的终边与角 $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ 的终边关于 $\angle xON=\dfrac{\pi}{4}$ 的终边 ON 对称. ON 是第一象限的角平分线，在角 α 的终边 OM 上取点 $P(x,y)$ 使 $|OP|=1$，则点 $P(x,y)$ 关于 ON 的对称点 $P_1(y,x)$ 在 OM_1 上，且 $|OP_1|=1$，$\angle xOP_1=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$，

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=x=\cos\alpha,\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=y=\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-(-\alpha)\right]=\cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(-\alpha)\right]=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha.$$

例 6 得出关于 $\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$ 与 α 的三角函数的关系的一组诱导公式：

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$

注 当角 α 的终边不在坐标轴上时，还可以得出诱导公式：

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha,$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\cot\alpha.$$

想一想：你能仿照 $k\pi\pm\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 的法则，概括 $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ 的运算法则吗？

练 习

1. 仿照例 1 的方法或利用例 2 的结果求下列三角函数值：

   (1) $\cos 135°$； (2) $\sin 315°$； (3) $\tan\frac{4\pi}{3}$.

2. 将角 $2\pi-\alpha$ 的三角函数用角 α 的三角函数来表示.
3. 利用三角函数线研究角 $\pi+\alpha$ 与角 α 之间的三角函数的关系.
4. 化简下列各式：

   (1) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$； (2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

习题 2

学而时习之

1. 已知角 α 的顶点与坐标原点重合，始边与 x 轴非负半轴重合，终边上一点 P 的坐标为$(4t,-3t)$（其中 $t>0$），求角 α 的正弦、余弦和正切函数值.

2. 已知角 α 的顶点与坐标原点重合，始边与 x 轴非负半轴重合，终边经过点 $P(a,a)$，其中 $a\neq 0$，求角 α 的正弦、余弦和正切函数值.

3. 利用三角函数的定义求下列各角的正弦、余弦和正切函数值：

(1) 2π；　(2) $-\dfrac{\pi}{4}$；　(3) $\dfrac{5\pi}{4}$.

4. 作出下列各角的正弦线、余弦线、正切线：

(1) $\dfrac{\pi}{3}$；　(2) $\dfrac{5\pi}{6}$；　(3) $\dfrac{5\pi}{3}$；　(4) $\dfrac{7\pi}{6}$.

5. 求下列各式的值：

(1) $\sin(-1\,320^\circ)$；　(2) $\cos\left(-\dfrac{26}{3}\pi\right)$；　(3) $\tan\dfrac{47}{6}\pi$.

6. 求值：$\sqrt{3}\cos 420^\circ+\tan 330^\circ+\sin(-60^\circ)$.

7. 已知 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{1}{2}$，求下列各值：

(1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$；　(2) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

温故而知新

8. 利用三角函数线判断当 α 为锐角时下列各式值的符号：

(1) $\sin\alpha-\tan\alpha$；　(2) $\sin\alpha+\cos\alpha-1$.

9. 已知 $\sin\theta=\dfrac{m-3}{m+5}$，$\cos\theta=\dfrac{4-2m}{m+5}$，且 $\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi$，求实数 m 的值.

10. 已知 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 是关于 x 的方程 $5x^2-x+5m=0$ 的两根，求实数 m 的值.

11. 已知 $\tan\alpha=2$，求下列各式的值：

(1) $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$；　(2) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}$.

12. 化简：$\left(\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\tan\alpha}\right)(1-\cos\alpha)$.

13. 已知 $\tan(5\pi-\alpha)=3$，求值：$\dfrac{\sin(\alpha-3\pi)+\cos(\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)+\cos(2\pi-\alpha)}$.

14. 已知 $\tan(3\pi+\alpha)=\sqrt{3}$，$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，求下列各式的值：

(1) $\cos(\pi+\alpha)$；　(2) $\sin(3\pi+\alpha)$.

15. 化简：$1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\tan(\pi+\alpha)$.

16. 在△ABC 中，试判断下列关系式是否恒成立，并说明理由.

(1) $\cos(A+B)=\cos C$；　(2) $\sin(A+B)=\sin C$；

(3) $\sin\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$；　(4) $\cos\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$.

3.3 三角函数的图象与性质

3.3.1 正弦函数、余弦函数的图象与性质

观察当角 x 增加时正弦线的升降变化及取值范围可以对函数 $y=\sin x$ 有直观地了解.

利用计算机可以根据函数表达式及自变量的取值区间立即画出函数图象. 比如，利用 Mathematica 软件，只要运行如下语句

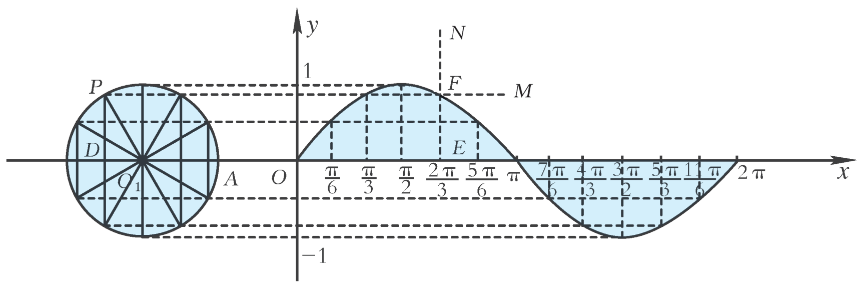
Plot[sin[x], {x, −2Pi, 2Pi}]

立即得到函数 $y=\sin x$, $x\in[-2\pi, 2\pi]$的图象.

我们先画出正弦函数 $y=\sin x$ 的图象，再通过观察图象研究正弦函数的性质.

可以利用正弦线画出 $y=\sin x$ 的图象.

如图 3-22，在 x 轴上取一点 O_1，以 O_1 为圆心画单位圆. 设 A 是这个单位圆与 x 轴的交点，且有向线段 O_1A 指向 x 轴的正方向. 在这个单位圆周上任取一点 P，作 PD 垂直于 x 轴，垂足为 D，则 DP 是 $\alpha=\angle AO_1P$ 的正弦线，点 P 的纵坐标 $y=\sin\alpha$. 在 x 轴上取点 $E(\alpha, 0)$，过点 P 作与 x 轴平行或重合的直线 PM，过点 E 作 x 轴的垂线 EN，PM 与 EN 交于点 F，则点 F 的坐标为$(\alpha, \sin\alpha)$，是 $y=\sin x$ 的图象上的一点.



$y=\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$

图 3-22

将以 O_1 为圆心的单位圆平均分成若干等份（比如 12 等份），对每一个分点 P 按前面所说的作法得到 $y=\sin x$ 的图象上的一点. 将所有这些点依次连成一条光滑曲线，就得到函数 $y=\sin x$ 在区间[0,

2π]上的图象，如图 3-22.

由于 $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ 对所有整数 k 都成立，因此，将 $y=\sin x$在区间$[0,2\pi]$上的图象逐次向左和向右平移 2π 个单位长度，就可以得到正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的整个图象.

正弦函数的图象称为**正弦曲线**（sine curve）.

正弦曲线在区间$[0,2\pi]$上有 5 个点（最高点、最低点、与 x 轴的交点）

$$(0,\ 0),\ \left(\frac{\pi}{2},\ 1\right),\ (\pi,\ 0),\ \left(\frac{3\pi}{2},\ -1\right),\ (2\pi,\ 0)$$

对曲线的升降起伏起着关键作用．在精确度要求不太高的时候，只要画出了这 5 个点，曲线的大致形状就基本确定了，将它们依次连成光滑曲线，就得到正弦曲线的简图．正弦曲线的这种近似画法称为“五点法”.

正弦曲线的精确而快捷的画法是利用计算机软件作图．很多计算机软件都可以根据函数表达式轻而易举地画出函数在指定的区间内的图象．图 3-23 是用计算机软件画出的正弦函数和余弦函数的图象.

如果可以利用计算机，就不用像前面那样费力描点画图.

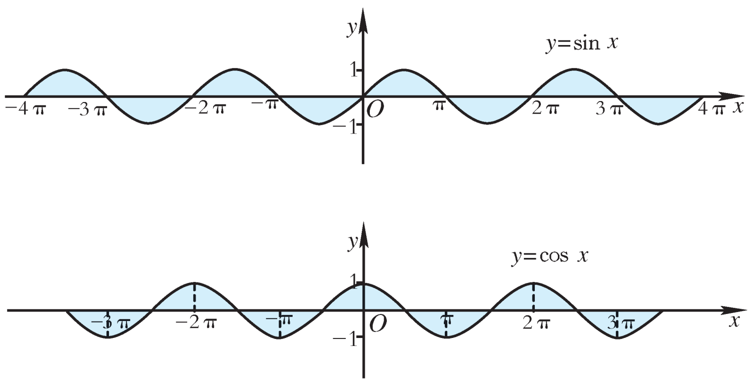


图 3-23

比较正弦函数 $y=\sin x$ 与余弦函数 $y=\cos x$ 的图象，发现它们的形状其实是一样的，只不过摆放的位置不同．将正弦曲线向左平行移动$\frac{\pi}{2}$个单位长度，得到的就是余弦函数的图象 $y=\cos x$.

这一现象也可以根据诱导公式

$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$

得出.

练习

在同一个坐标系中画出函数

$$y=\sin x,\ x\in[-\pi,\pi] \text{和}\ y=\cos x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$$

的图象（有条件可用计算机画图，也可用五点法画简图）.

例 1 观察图 3-23，并根据所学知识得出正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域、值域、最大最小值点、与 x 轴的交点、单调区间.

解 **定义域** 由三角函数的定义及三角函数线的作法知 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 对所有的实数都有定义，**定义域为 $\mathbf{R}$.**

图象上不可能将整条曲线画出来. 但从画图的过程知道 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的图象可以向左右两边不断地平移 2π 个单位长度，无限延伸.

值域 从三角函数的定义和图象易见：

正弦函数、余弦函数的值域都是 $[-1,1]$. 最大值都是 1，最小值都是 -1.

正弦函数 $y=\sin x$：

最大值 1，当且仅当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ 时取得；最小值 -1，当且仅当 $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ 时取得.

图象与 x 轴的交点（$y=0$ 的点）的坐标为 $(k\pi,0)$，$k\in\mathbf{Z}$.

单调区间 由角的终边旋转过程中正弦线的变化以及三角函数图象可知：正弦函数在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上从 -1 单调递增到 1，在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上从 1 单调递减到 -1. 将这两个区间分别加上 2π 的整数倍，得

对每个整数 k，函数在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ 内从 -1 到 1 单调递增；在区间 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$ 内从 1 到 -1 单调递减.

余弦函数　$y=\cos x$：

最大值 1，当且仅当 $x=2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ 时取得；最小值 -1，当且仅当 $x=(2k+1)\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ 时取得.

图象与 x 轴的交点的坐标为 $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, 0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

单调区间　由角的终边旋转过程中余弦线的变化以及三角函数图象可知：余弦函数在区间 $[-\pi, 0]$ 上从 -1 单调递增到 1，在区间 $[0, \pi]$ 上从 1 单调递减到 -1. 将这两个区间分别加上 2π 的整数倍，得

对每个整数 k，函数在区间 $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ 内从 -1 到 1 单调递增；在区间 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ 内从 1 到 -1 单调递减.

例 2　不通过求值，判断下列各式的值是正数还是负数.

(1) $\sin(-1)-\sin(-1.1)$；　　(2) $\cos\frac{11\pi}{7}-\cos\frac{12\pi}{7}$.

解　(1) 由于 $-\frac{\pi}{2}<-1.1<-1<\frac{\pi}{2}$，且 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 内递增，故

$\sin(-1)>\sin(-1.1)$，$\sin(-1)-\sin(-1.1)$ 是正数.

(2) 由于 $\pi<\frac{11\pi}{7}<\frac{12\pi}{7}<2\pi$，而 $y=\cos x$ 在区间 $[\pi, 2\pi]$ 内递增，故

$\cos\frac{11\pi}{7}<\cos\frac{12\pi}{7}$，　$\cos\frac{11\pi}{7}-\cos\frac{12\pi}{7}$ 是负数.

我们还知道：如果一个函数 $y=f(x)$ 对定义域的自变量 x 的所有的值都满足条件 $f(-x)=-f(x)$，就称为奇函数，它的图象关于原点对称；如果对定义域的自变量 x 的所有的值都满足条件 $f(-x)=f(x)$，就称为偶函数，它的图象关于 y 轴对称.

由诱导公式 $\sin(-x)=-\sin x$ 知**正弦函数 $y=\sin x\ (x\in\mathbf{R})$ 是奇函数，**它的图象关于原点对称.

观察函数的图象可以得出同样的结论.

由诱导公式 $\cos(-x)=\cos x$ 知**余弦函数 $y=\cos x$（$x\in\mathbf{R}$）是偶函数**，它的图象关于 y 轴对称.

练习

不通过求值，判断下列各式的值的符号：

（1）$\sin\frac{1}{2}-\sin\frac{1}{3}$；（2）$\cos\frac{8\pi}{5}-\cos\frac{9\pi}{5}$；

（3）$\sin 1-\sin 2$；（4）$\cos\frac{4\pi}{9}-\cos\frac{7\pi}{9}$.

3.3.2 正切函数的图象与性质

利用正切线可以画出正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上的图象，如图 3-24.

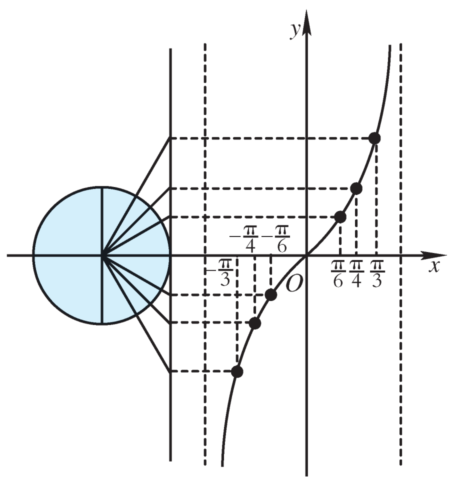


图 3-24

由诱导公式 $\tan(x+\pi)=\tan x$ 知道，可以将正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上的图象不断地向右和向左平移 π 个单位长度，得到正切函数

$$y=\tan x, x\in\mathbf{R} \text{ 且 } x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$$

（$k\in\mathbf{Z}$）的图象，称为**正切曲线**（tangent curve）.

由图 3-25 可以看出：正切曲线由被互相平行的直线 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）所隔开的无穷多支曲线组成，每支曲线形状完全相同，都可以由其中一支曲线在水平方向上向右或向左平移 $k\pi$ 个单位长度得到，

k是适当的正整数.

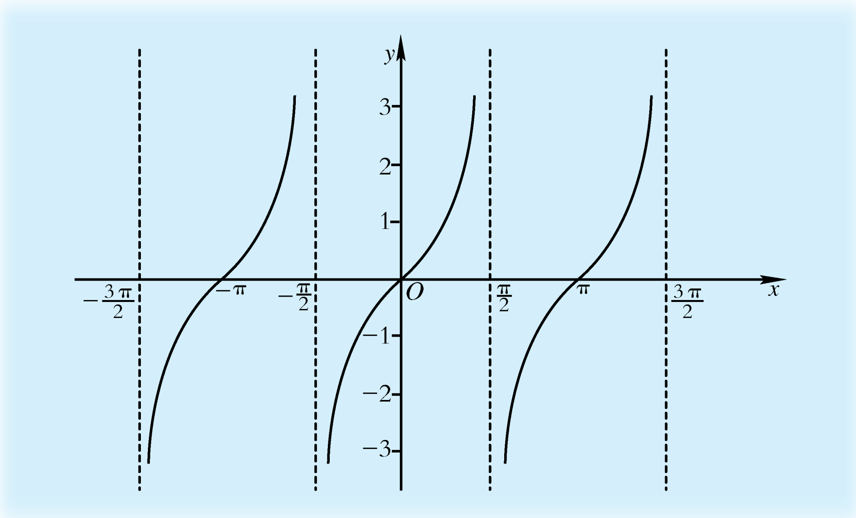


图 3-25

通过观察图象和适当的理论分析,可以得到正切函数的如下性质:

(1) **定义域** 正切函数的定义域为

$$\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbf{Z}\}.$$

(2) **值域** 对任意实数 y,取坐标为$(1,y)$的点 P,则$\tan \angle xOP=y$. 可见,**正切函数的值域是全体实数的集合 $\mathbf{R}$.**

(3) **与 x 轴的交点的横坐标为 $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.**

(4) **单调区间** 从图象上看出:正切函数 $y=\tan x$ 在每个开区间$\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k \in \mathbf{Z})$内单调递增,$y$ 取遍所有的实数值. 当 x 递增到无限接近 $k\pi+\frac{\pi}{2}$时,y 无限增大;当 x 递减到无限接近 $k\pi-\frac{\pi}{2}$时,y 无限减小(取负值且绝对值无限增大).

(5) **奇偶性** 由于 $\tan(-x)=-\tan x$ 对所有使 $\tan x$ 有意义的 x 都成立,**正切函数 $y=\tan x\left(x \in \mathbf{R}, x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbf{Z}\right)$是奇函数**. 容易观察到它的图象关于原点对称.

例 不通过求值,确定下列各式的值的符号:

(1) $\tan(-3)-\tan(-3.1)$; (2) $\tan\frac{7\pi}{6}-\tan\frac{7\pi}{5}$.

解 (1) $-\pi-\frac{\pi}{2}<-3.1<-3<-\pi+\frac{\pi}{2}$，由 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\pi-\frac{\pi}{2},-\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内递增知

$\tan(-3.1)<\tan(-3)$，$\tan(-3)-\tan(-3.1)>0$，符号为正.

(2) $\pi-\frac{\pi}{2}<\frac{7\pi}{6}<\frac{7\pi}{5}<\pi+\frac{\pi}{2}$，由 $y=\tan x$ 在区间 $\left(\pi-\frac{\pi}{2},\ \pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内递增知

$$\tan\frac{7\pi}{6}<\tan\frac{7\pi}{5},\ \tan\frac{7\pi}{6}-\tan\frac{7\pi}{5}<0，符号为负.$$

练 习

不通过求值，试确定下列各式值的符号：

(1) $\tan\pi-\tan 3.14$；

(2) $\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)-\tan\left(-\frac{7\pi}{5}\right)$；

(3) $\tan\frac{\pi}{9}+\tan\frac{7\pi}{9}$.

习题 3

学而时习之

1. 利用五点法作出函数 $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$和函数 $y=\cos x,x\in[0,2\pi]$的图象，并指出 $y=\sin x$ 是减函数且 $y=\cos x$ 是增函数的 x 的范围.
2. 利用函数图象判断函数 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的图象在$[0,2\pi]$上有几个交点.

温故而知新

3. 比较下列各组数的大小：

(1) $\sin 4$，$\sin\frac{5\pi}{4}$，$\sin\frac{7\pi}{6}$；　　　　(2) $\cos 1$，$\cos 2$，$\cos 3$.

4. 利用函数 $y=\sin x$，$x\in[-\pi,\pi]$与 $y=\cos x$,$x\in[-\pi,\pi]$的图象，在 $[-\pi,\pi]$ 内求 $\sin x<0$ 且 $\cos x<0$ 的 x 的取值范围.

5. 利用 $y=\tan x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$的图象，在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内写出满足下列条件的 x 的取值范围：

(1) $\tan x\geqslant 0$；　　　　(2) $\tan x\leqslant 1$.

6. 比较下列各组数的大小：

(1) $\tan(-1)$，$\tan\frac{1}{2}$；　　　　(2) $\tan\frac{\pi}{5}$，$\sqrt{3}$，$\tan\frac{5\pi}{12}$.

3.4 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象与性质

3.4.1 三角函数的周期性

除了我们在 3.3 节中讨论的定义域、值域、与 x 轴的交点、单调性、最大值、最小值等性质外，三角函数还有一个非常突出的性质：周期性.

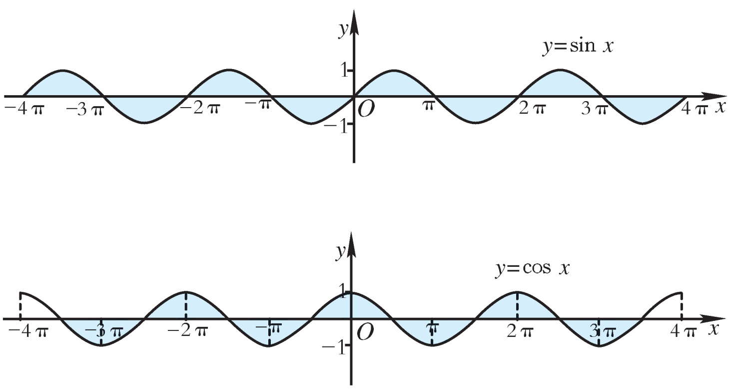


图 3-26

观察正弦函数、余弦函数的图象(如图 3-26)，可以看出整个图象是由其中的一段(比如区间$[0,2\pi]$上的一段)一次又一次沿水平方向向右和向左平移 2π 个单位长度得到的，曲线的波形在水平方向每经过 2π 个单位长度之后就重复一次，而整个曲线在水平方向平移 2π 个

单位长度之后与原来的曲线重合．用式子来描述，就是

$$\sin(x+2\pi)=\sin x,\quad \cos(x+2\pi)=\cos x$$

对所有的 $x\in\mathbf{R}$ 成立．

一般地，对于函数 $y=f(x)$，如果存在非零常数 T，使得当 x 取定义域内每一个值时，$x\pm T$ 都有定义，并且

$$f(x\pm T)=f(x),$$

则这个函数 $y=f(x)$ 称为**周期函数**（periodic function），T 称为这个函数的一个**周期**（period）．

如果 T 是函数 $y=f(x)$ 的周期，则由 $f(x)=f(x+T)=f((x+T)+T)=f(x+2T)$ 知道 $2T$ 也是它的周期，同理可知 T 的所有的非零整数倍都是 $y=f(x)$ 的周期．

按照这个概念，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是周期函数，2π 及其所有的非零整数倍也都是它们的周期．但从图象上可以看出，比 2π 更小的正数不可能是 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的周期．也就是说：这两个函数的图象向右平移比 2π 更短的距离不可能与原来的曲线重合．我们称 2π 是 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的**最小正周期**（minimal positive period）．

一般地，如果周期函数 $y=f(x)$ 的所有的周期中存在一个最小的正数，这个最小的正数就称为这个函数的**最小正周期**．我们也常常将“最小正周期”简称为“周期”．

再来看正切函数的图象（如图 3-27）：

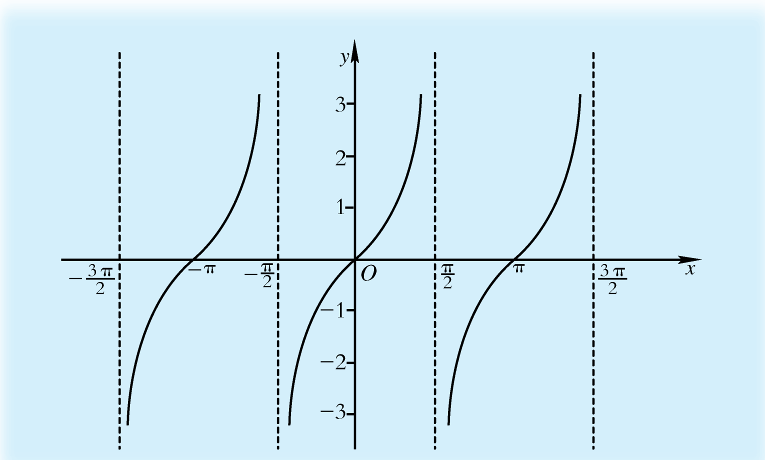


图 3-27

观察图象可知：将整个图象向右平移 π 个单位长度之后与原曲线

重合(实际上是将曲线的每一支移动到了与下一支重合的位置). 由诱导公式也知道 $\tan(x+\pi)=\tan x$ 对于函数 $y=\tan x$ 的定义域内所有的 x 都成立，因此 π 是正切函数的周期，所有的 $k\pi(k\in\mathbf{Z}, k\neq 0)$ 也都是周期. 而且可以从图象上观察到：**π 就是正切函数 $y=\tan x$ 的最小正周期**.

练习

指出下列各函数的最小正周期：

(1) $y=2\sin x$；　(2) $y=\frac{1}{2}\cos x$；　(3) $y=3\tan x$.

3.4.2　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象与性质

我们已经对三角函数的周期性有了一些简单的认识. 函数是描述事物变化的一种数学模型，周期函数是描述周期性变化的数学模型. 在自然界和我们的生产、生活中，周期性变化大量存在. 比如，声音是振动产生的，振动就是位置或其他物理量的周期性变化. 太阳东升西落，海水潮涨潮退，春夏秋冬四季更替，都包含着周期性变化. 我们使用的交流电的电流大小、电压高低也是周期性变化的.

正弦函数是描述周期性变化的最简单、最基本、非常重要的周期函数. 但只用 $y=\sin x$ 也有明显的局限性：它的周期只能是 2π 而不能是其他正数，但周期现象的周期显然可以取各种不同的值；$y=\sin x$ 的最大值只能是 1，最小值只能是 -1，这也不足以描述周期性变化的量的各个不同的变化范围；$y=\sin x$ 的变化起点($x=0$ 时的状态)只能是 $y=0$，这也不能描述可以从不同状态开始的周期性变化.

将 $y=\sin x$ 推广到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，其中 A，ω，φ 是常数，可以在一定程度上克服 $y=\sin x$ 的上述缺点，描述不同周期、不同变

化范围、从不同的初始状态开始的周期性变化.

因此，研究函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质具有重要的理论和应用意义.

可用具有画图功能的计算机软件或计算器画图，也可用五点法画简图观察.

例 1 在同一坐标系中画出 $y=\sin x$，$y=2\sin x$，$y=\frac{1}{2}\sin x$ 在 $x\in[-\pi,\pi]$上的图象，观察它们之间的关系，并说出这三个函数的周期、最大值、最小值、值域之间的关系.

解 如图 3-28，观察 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin x$ 的图象，可以看出：$y=2\sin x$ 的图象可以由 $y=\sin x$ 的图象上的每一点$(x,\sin x)$的横坐标不变、纵坐标乘以 2(从而与 x 轴的距离放大到原来的 2 倍)得到. 由 $y=\sin x$ 经过这样的变化得到的 $y=2\sin x$，周期仍是 2π，但最大值和最小值分别变为 2 和 -2，值域变成了$[-2,2]$，也就是说“振动幅度”扩大到 $y=\sin x$ 的 2 倍.

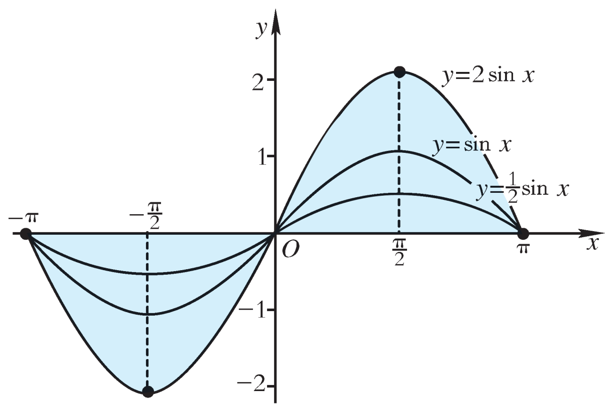


图 3-28

类似地，$y=\frac{1}{2}\sin x$ 的图象可以由 $y=\sin x$ 的图象上每一点（x，$\sin x$）的横坐标不变、纵坐标乘以 $\frac{1}{2}$ $\left(\text{与 } x \text{ 轴的距离缩短到原来的} \frac{1}{2}\right)$得到. 由 $y=\sin x$ 经过这样的变化得到的 $y=\frac{1}{2}\sin x$，周期仍是 2π，最大值和最小值分别变为 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$，值域变为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，“振动幅度”缩小为 $y=\sin x$ 的 $\frac{1}{2}$.

一般地，对任意 $A>0$，$A\neq 1$，函数 $y=A\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象可

以由 $y=\sin x$ 的图象上每一点的横坐标不变、纵坐标乘以 A 得到. $y=A\sin x$的周期仍是 2π，值域为$[-A,A]$，最大值和最小值分别为 A 和$-A$.

例 2 说出函数 $y=3\sin x$，$y=\frac{1}{3}\sin x$ 的值域与周期.

解 周期都是 2π. 值域分别为$[-3,3]$,$\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$.

例 3 在同一个坐标系中画出 $y=\sin x$，$y=\sin 2x$，$y=\sin\frac{1}{2}x$ 在$[-2\pi,2\pi]$内的图象，观察它们之间的关系，并说出这三个函数的周期、最大值、最小值、值域之间的关系.

解 如图 3-29，经过观察和分析，发现：

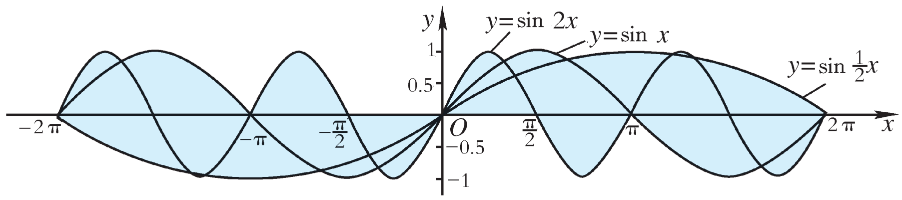


图 3-29

$y=\sin 2x$ 的图象可以由 $y=\sin x$ 的图象上每一点$(x,\sin x)$的纵坐标不变、横坐标除以 2$\left(\text{到 } y \text{ 轴的距离缩短到原来的}\frac{1}{2}\right)$得到. $y=\sin 2x$的值域、最大值、最小值都与 $y=\sin x$ 相同，周期缩短为$\frac{2\pi}{2}=\pi$.

$y=\sin\frac{1}{2}x$ 的图象可以由 $y=\sin x$ 的图象上每一点$(x,\sin x)$的纵坐标不变、横坐标除以$\frac{1}{2}$（到 y 轴的距离放大到原来的 2 倍）得到. $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的值域、最大值、最小值都与 $y=\sin x$ 相同，周期扩大为 $2\pi\cdot 2=4\pi$.

一般地，$y=\sin\omega x$，$x\in\mathbf{R}$（其中 $\omega>0$，$\omega\neq 1$）的图象可由 $y=\sin x$的图象上每一点$(x,\sin x)$的纵坐标不变、横坐标伸长$(0<\omega<1)$

或缩短($\omega>1$)为原来的$\frac{1}{\omega}$倍得到. $y=\sin \omega x$ 的值域为$[-1, 1]$，周期为$\frac{2\pi}{\omega}$.

例 4 (1) 求函数 $y=\sin 0.2x$，$y=\sin 2\pi x$ 的值域与周期；

(2) 求使 $y=\sin kx$ 的周期为$\frac{1}{50}$的正数 k 的值.

解 (1) 值域都是$[-1, 1]$，$y=\sin 0.2x$ 的周期为$\frac{2\pi}{0.2}=10\pi$，$y=\sin 2\pi x$的周期为$\frac{2\pi}{2\pi}=1$.

(2) 周期为$\frac{2\pi}{k}=\frac{1}{50}$，故 $k=2\pi\cdot 50=100\pi$.

练 习

1. 画出下列函数在 $x\in[0, 4\pi]$的图象（每一小组画在同一坐标系中），并指出它们的图象可以由 $y=\sin x$ 图象如何变化而得到.

   (1) $y=3\sin x$，$y=\frac{1}{3}\sin x$； (2) $y=\sin \frac{1}{2}x$，$y=\sin 2x$.

2. 求下列函数的值域和周期：

   (1) $y=4\sin x$；(2) $y=\sin \frac{1}{4}x$；(3) $y=2\sin 2x$.

例 5 在同一坐标系中画出 $y=\sin x$，$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$一个周期内的图象，观察它们之间的关系.

解 经过对图 3-30 的观察和分析，发现：

$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象是由 $y=\sin x$ 的图象上每一点$(x, \sin x)$的纵坐标不变、横坐标减去$\frac{\pi}{4}$得到，也就是将 $y=\sin x$ 的图象向左平移

$\frac{\pi}{4}$个单位长度得到.

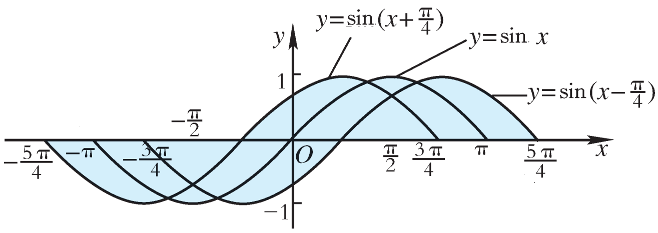


图 3-30

$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象可以由 $y=\sin x$ 的图象上每一点$(x,\sin x)$的纵坐标不变、横坐标加上$\frac{\pi}{4}$得到，也就是将 $y=\sin x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度得到.

一般地，$y=\sin(x+\varphi)$($x\in\mathbf{R}$,$\varphi\neq 0$ 是常数)的图象可以由 $y=\sin x$ 的图象向左(当 $\varphi>0$)或向右(当 $\varphi<0$)平行移动$|\varphi|$个单位长度得到.

例 6 画出函数 $y=2.5\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$($x\in\mathbf{R}$)的图象，并求出这个函数的周期和值域.

解 先将函数 $y=\sin x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，得到函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象，值域仍为$[-1,1]$，周期仍为 2π.

再将 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象上所有的点的纵坐标不变、横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$，得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象，这个函数的值域仍为$[-1,1]$，周期变成$\frac{2\pi}{2}=\pi$.

将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象上所有的点的横坐标不变、纵坐标扩大为原来的 2.5 倍就得到函数 $y=2.5\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象，如图 3-31 所示.

这个函数的值域为$[-2.5,2.5]$，周期为 π.

利用计算机软件可以直接画出图象. 比如，在 Mathematica 中，运行语句

Plot[2. 5Sin[2x+Pi/4]，{x，−1. 3Pi，11Pi/8}]

就可得出图 3－31.

但是，题中的讨论可以让我们了解 $y=2.5\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象与 $y=\sin x$ 的图象之间的关系，还是有意义的.

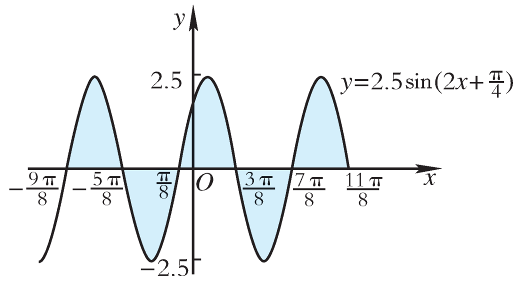


图 3-31

一般地，设 $A>0$，$\omega>0$，φ 是常数，函数

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)(x\in\mathbf{R})$$

的图象可经过以下步骤得到：

将正弦曲线 $y=\sin x$ 向左（当 $\varphi>0$）或向右（当 $\varphi<0$）平行移动 $|\varphi|$ 个单位长度；

再将所得曲线上每一点的横坐标伸长（$0<\omega<1$）或缩短（$\omega>1$）为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍；

进一步将所得曲线上每一点的纵坐标扩大（$A>1$）或缩小（$0<A<1$）为原来的 A 倍.

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(x\in\mathbf{R})$ 的值域为 $[-A,A]$，周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$.

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 经常用来表示振动过程中的物理量.

此时 A 表示这个振动量偏离平衡位置的最大距离，称其为**振幅**(amplitude of vibration).

如果 x 表示时间，则函数的周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ 就是往复振动一次所需的时间. 而

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$$

表示单位时间内往复振动的次数，称为**频率**（frequency).

$\omega x+\varphi$ 称为**相位**(phase). $x=0$ 时的相位 φ 称为**初相**(initial phase).

例 7 某工厂使用的交流电的电流 I(A)与 时间 t(s)之间满足函数关系式

$$I=5\sin 100\pi t.$$

求 I 变化的周期和频率.

解 周期为 $\frac{2\pi}{100\pi}=\frac{1}{50}$(s)，频率为 50 Hz.

例 8 将下列函数写成 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的形式，其中 $A>0$，$\omega>0$，求出它们的振幅和周期，并画出简图.

(1) $y=-2\cos 0.5\pi x$； (2) $y=-\sin 2x$.

解 (1) 由诱导公式知 $-\cos 0.5\pi x=\sin\left(0.5\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$，故函数为 $y=2\sin\left(0.5\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$，振幅为 2，周期为 $\frac{2\pi}{0.5\pi}=4$. 图象如图 3-32.

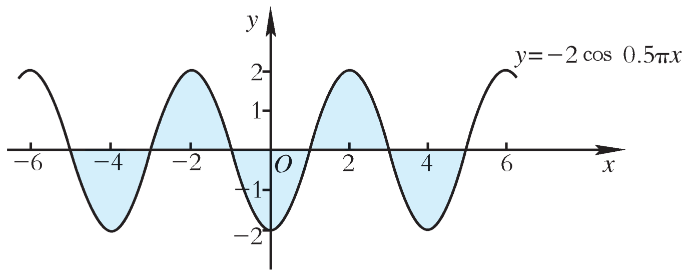


图 3-32

(2) $-\sin 2x=\sin(2x+\pi)$，故函数可写为 $y=\sin(2x+\pi)$，振幅为 1，周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$. 图象如图 3-33.

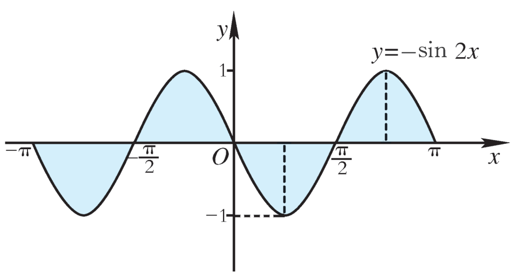


图 3-33

练 习

1. 作出下列函数在一个周期内的图象，并说明它们的图象可由函数 $y=\sin x$ 的图象如何变化而得到：

(1) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$； (2) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

2. 求下列函数的振幅、周期和初相，并说明它们的图象可由函数 $y=\sin x$ 的图象如何变化而得到：

(1) $y=3\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{5}\right)$； (2) $y=\frac{1}{3}\sin\left(3\pi x-\frac{\pi}{6}\right)$.

3. 画出下列函数图象的简图：

(1) $y=1.5\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$； (2) $y=-\cos\left(-2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

3.4.3 应用举例

例 1 弹簧作用下物体的振动.

如图 3-34，弹簧下面悬挂着一个小球，小球在位置 O 处于平衡状态，也就是在此位置它所受到的弹力与重力的合力 $F=0$.

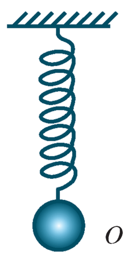


图 3-34

以 O 为原点作数轴，以向上的方向为正方向，这条数轴上的每一个位置 P 可以用一个实数 y 来表示，称为点 P 的坐标. y 就是小球相对于平衡位置 O 的高度. 我们可以直接用 y 来代表小球的位置.

将小球向下拉到某个位置，然后放开手让小球自由运动. 设放手后，在 t 时刻小球的位置坐标为 y，则 $y=f(t)$ 是 t 的函数. 给定描述弹簧弹性强弱和小球质量的一组参数. 根据所受弹力所服从的胡克定律，可以推出：小球运动的加速度 $a=-ky$ 由所处位置坐标决定，其中 $k>0$ 是由弹簧弹性强弱和小球质量决定的常数.

利用计算机模拟出 $k=1$ 时 $y=f(t)$ 的函数关系图象，如图 3-35.

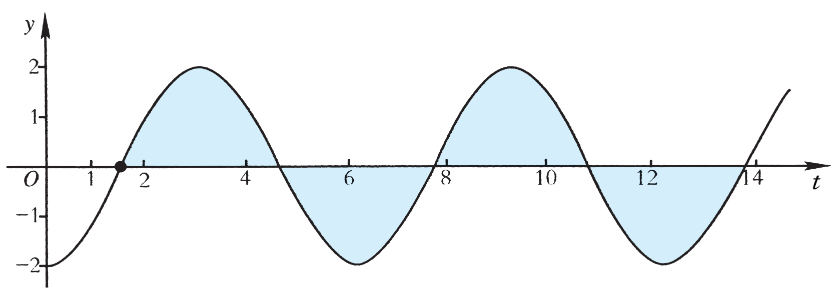


图 3-35

观察图象，研究下列问题：

(1) 你认为图象是什么形状的曲线？

(2) 小球的运动可以用什么形式的函数 $y=f(t)$ 来描述？

(3) 根据图象提供的数据，写出函数 $y=f(t)$ 的表达式.

解 (1) 图象看起来像是正弦函数图象.

(2) 函数可能具有 $y=A\sin(\omega t+\varphi)$ 的形式.

(3) 由图中可以看出图象的最大值为 2，最小值为 -2. 当 $t=0$ (即刚放开手)时小球处于最低点 $2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$，故可取 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$.

从图中看出：图象与 x 轴的第一个交点的横坐标约为 1.5，从 $t=0$ 到 $t=1.5$ 经过$\frac{1}{4}$个周期，因此周期 $T\approx1.5\times4=6$，$\omega=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$. 函数表达式近似为

$$y=2\sin\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{2}\right). \qquad ①$$

由于从图上观察到的数据有误差，得到的表达式只能是近似的. 但我们还是可以想办法提高精确度. 经过观察，发现图象与 x 轴的第 4 个交点的横坐标非常接近 11. 从 $t=0$ 到 $t=11$ 共经过$\frac{7}{4}$个周期. 于是周期 $T\approx11\times\frac{4}{7}=\frac{44}{7}$，$\omega=2\pi\cdot\frac{7}{44}=\frac{7\pi}{22}$. 函数表达式近似为

$$y=2\sin\left(\frac{7\pi}{22}t-\frac{\pi}{2}\right). \qquad ②$$

由于计算机模拟只能是近似的，我们从图上获取数据也只能是近似的，所得到的函数式①，②都只能是近似的. 不过，我们相信②所用的周期$\frac{44}{7}$比①所用的 6 更准确些. 因此可以认为②比①更好，但不能说①就是错的. 事实上，②也有可能不是完全精确的. 将表达式②中自变量的系数$\frac{7\pi}{22}$化成小数约为 0.999 6，这使我们怀疑它有可能应当就等于 1. 事实上，理论分析的结果确实就应当是 1，函数表达式应为

$$y=2\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right).$$

如果你熟悉祖冲之所说的 π 的分数近似值 $\frac{22}{7}$(约率)，$\frac{355}{113}$(密率)，一看见所得的周期值 $\frac{44}{7}$ 就应当猜出它是 2π 的近似值.

所用的理论分析方法在大学数学中将会学到.

它的周期就是 2π，但这是不可能由图上得到的.

用计算机还可模拟出 $k=4$ 时的函数曲线，与 $k=1$ 时的上述曲线画到同一个坐标系中，如图 3-36.

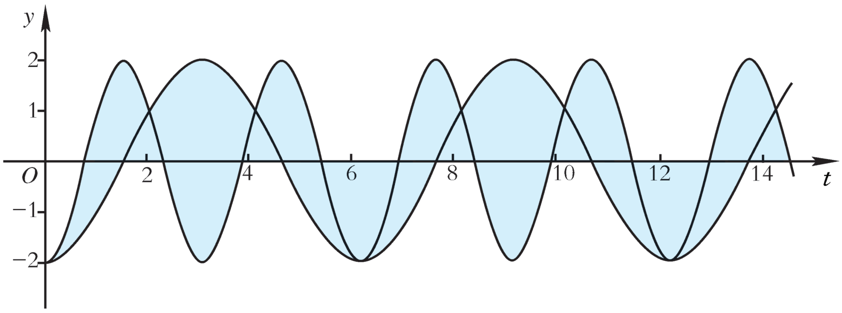


图 3-36

从图中容易看出：$k=4$ 时图象的周期恰是 $k=1$ 时的周期的一半. 这促使你有理由猜想，周期 T 与 $\sqrt{k}$ 成反比. 如果你有条件并会自己用计算机模拟，不妨取 $k=9$ 再作一次，看周期是否会变成 $k=1$ 时的 $\frac{1}{3}$.

例 2 潮汐现象.

阅读以下材料，并完成它所提出的各项任务：

海水受日月的引力，在一定的时候发生涨落的现象叫潮汐. 一般地，早潮叫潮，晚潮叫汐. 在通常条件下，船在涨潮时靠近船坞，卸货后落潮时返回海洋. 下面是某港口某天的时间与水深关系表.

时刻	水深/m	时刻	水深/m	时刻	水深/m
0:00	5.0	9:00	2.5	18:00	5.0
3:00	7.5	12:00	5.0	21:00	2.5
6:00	5.0	15:00	7.5	24:00	5.0

(1) 选用一个三角函数来近似地描述这个港口的水深与时间的函数关系，给出整点时水深的近似数值；

(2) 一条货船的吃水深度（船底与水面的距离）为 4 m，安全条例规定至少要有 1.5 m 的安全间隙（船底与海洋底的距离），该船何时能进入港口？在港口能呆多久？

(3) 若某船的吃水深度为 4 m，安全间隙为 1.5 m，该船在2：00开始卸货，吃水深度以 0.3 m/h 的速度减少，那么该船什么时间必须停止卸货，将船驶向较深的水域？

解 (1) 建立直角坐标系，以时间 t(h)为横坐标，水深 y(m)为纵坐标，将已知点画在坐标系中，如图 3-37.

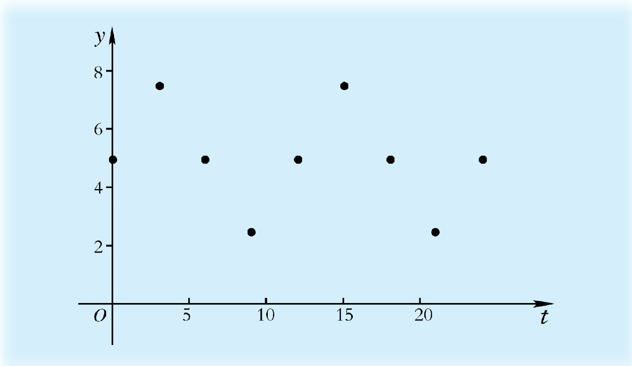


图 3-37

根据已知点的升降趋势及周期性，容易看出，一条正弦曲线 $y=5.0+2.5\sin(\omega t+\varphi)$可以经过这些已知点. 由已知数据易知周期 $T=12$，故 $\omega=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$. 由 $t=0$ 时 $y=5.0$ 知 $\sin\varphi=0$，再由 $t=3$ 时 $y=7.5$ 知 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=1$. 在$[0,2\pi)$范围内只能取 $\varphi=0$. 故所求正弦函数式为

$$y=5.0+2.5\sin\frac{\pi t}{6}.$$

将它的图象及原已知点画在同一个坐标系中，如图 3-38.

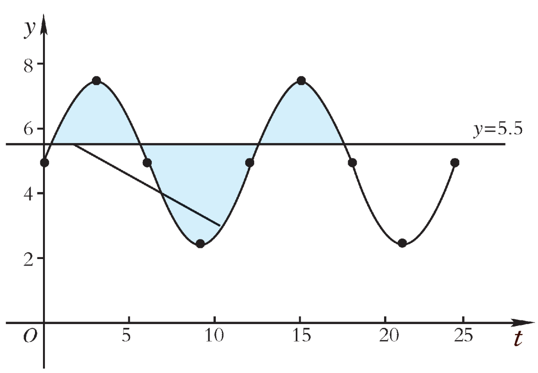


图 3-38

观察图形可知它经过了所有的已知点.

由函数表达式 $y=5.0+2.5\sin\frac{\pi t}{6}$ 算出整点(t 取整数值 0,1,2,…,24)时水深的近似数值如下表.

时刻	0,12,24	1,13	2,14	3,15	4,16	5,17
水深/m	5.0	6.25	7.165	7.5	7.165	6.25
时刻	6,18	7,19	8,20	9,21	10,22	11,23
水深/m	5.0	3.75	2.835	2.5	2.835	3.75

(2) 要使船底与洋底的距离≥1.5 m,水深(即水面与洋底的距离)必须≥(4+1.5)m=5.5 m.

将直线 $y=5.5$ 的图象与曲线 $y=5.0+2.5\sin\frac{\pi t}{6}$ 的图象画到同一个坐标系中,如图 3-38. 从图形观察到 $y\geq5.5$ 的区域有两段,由整点时的水深表可知在时间区间[1,5]及[13,17]内船只进入港口是安全的. 也就是说,可以在凌晨或下午 1 点进入港口,在港口可以呆 4 h.

如果要使船只在港口呆更长时间,需要算出水深为 5.5 m 的更精确的时间,也就是说要解方程

$$5.0+2.5\sin\frac{\pi t}{6}=5.5.$$

解之得

$$\sin\frac{\pi t}{6}=0.2.$$

需要求满足条件 $\sin x=0.2$ 的角 $x=\frac{\pi t}{6}$. 查表或用计算器可得 $x=0.2014$.

由图象上看,符合要求的水深所对应的角 $x=\frac{\pi t}{6}$ 的区间起点在第一象限,就是0.201 4;区间终点在第二象限,应为 $\pi-0.2014=3.1416-0.2014=2.9402$.

由$\frac{\pi t}{6}=0.2014$解出$t=0.3846(\text{h})\approx 23.08(\text{s})$. 区间起点必须取在 0 点 24 分以后.

由$\frac{\pi t}{6}=\pi-0.2014$解出$t=6-0.3846=5.6154(\text{h})$，而$5.6154\ \text{h}\approx 5\ \text{h}\ 37.1\ \text{min}$. 区间终点必须取在 5 点 37 分之前.

因此，船只可在凌晨 0 点 24 分以后进港，5 点 37 分之前出港；或在下午 12 点 24 分之后进港，17 点 37 分之前出港. 如果在凌晨 0 点 24 分或下午 12 点 24 分进港，为安全起见至多可以呆 5 h. 如果晚些时候进港，则只能呆更少时间. 因此，船只不应以在码头呆多少小时来决定何时可以出港，而应在出港的最晚时间到来之前就作好充分准备（包括完成卸货和完成驶离港口的准备工作），并留有充分余地，保证在最晚时间之前能够驶离港口.

虽然经过计算得出了上述安全区间，考虑到所建模型及所用的数据可能有不准确之处，特别是如果上述数据是海水深度的预报，更难以保证它的准确性. 建议船只留有充分的余地，在凌晨或下午 1 点以后进港，5 点之前离港.

（3）从2：00开始吃水深度以0.3 m/h的速度减少，则安全深度(单位：m)y=吃水深度+安全间隙−卸货时减少的吃水深度，可表示为

$$y=4+1.5-0.3(t-2),t\geqslant 2.$$

将$y=5.5-0.3(t-2),t\geqslant 2$的图象与$y=5.0+2.5\sin\frac{\pi t}{6}$的图象画在同一个坐标系中，仍如图 3-38. 观察正弦曲线高于直线的部分包含$t=6$但不包含$t=7$. 为安全起见，并考虑到船只在卸货之后到驶离码头也需要一定时间，因此船只应当在 6 点之前停止卸货，将船驶向较深的水域.

习题 4

学而时习之

1. 指出下列各函数的周期和值域：

(1) $y=4\sin x$；　(2) $y=\frac{1}{3}\cos x$；

(3) $y=\cos 2x$；　(4) $y=\sin(\pi x+2\pi)$；

(5) $y=-3\tan x$；　(6) $y=\frac{1}{2}\tan(2x+\pi)$.

2. 作出下列函数在一个周期内的图象，并说明它们的图象是由 $y=\sin x$ 的图象经怎样的变化而得到的，再指出它们的周期和值域：

(1) $y=\frac{2}{3}\sin x$；　(2) $y=4\sin x$；

(3) $y=\sin\frac{2}{3}x$；　(4) $y=\sin 4x$；

(5) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$；　(6) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$；

(7) $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$；　(8) $y=3\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$.

3. 指出下列函数的振幅、周期、初相和相位：

(1) $y=4\sin\left(\frac{1}{4}x+\frac{\pi}{4}\right)$；　(2) $y=3\sin\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)$；

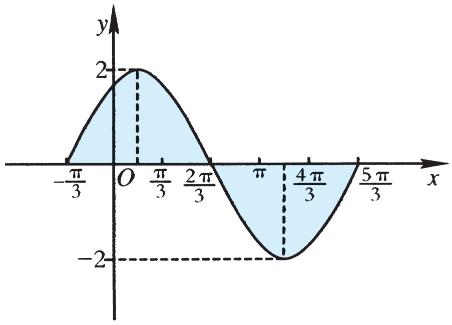
(3) $y=\frac{4}{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{1}{4}\right)$；　(4) $y=\frac{3}{4}\sin\left(\frac{2}{\pi}x-\frac{\pi}{3}\right)$.

4. 将下列函数写成 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的形式，其中 $A>0$，$\omega>0$，$-\pi<\varphi\leqslant\pi$，并指出它们的振幅、周期、相位，画出草图：

(1) $y=-2\sin\frac{1}{2}x$；　(2) $y=-3\cos 2x$.

温故而知新

5. 图 3-39 中的两个图都是正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 在一



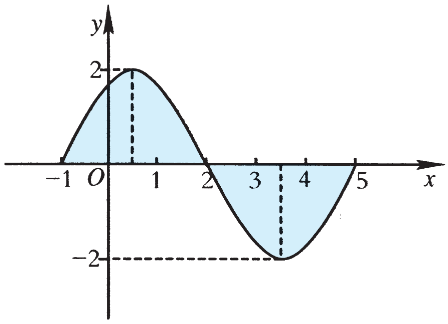


图 3-39

个周期内的图象，试分别写出这两个函数的解析式.

6. 某工厂使用交流电的电流 I（A）随时间 t（s）变化的函数为 $I=10\sin\left(100\pi t+\frac{2\pi}{3}\right)$. 求电流变化的周期和频率，以及当 $t=\frac{7}{120}$ s 时的电流.

7. 一弹簧振子的位移 y（单位：cm）与时间 t（单位：s）的函数关系式为 $y=5\cos(\pi t+0.4\pi)$.

求：(1) 当 $t=0.6$ s 时，弹簧振子离平衡位置的距离是多少；

(2) 振动一次所需要的时间是多少；

(3) 用计算器或计算机画出它的图象.

8. 一根长为 l cm 的线，一端固定，另一端悬挂一个小球. 小球摆动时，离开平衡位置的位移 s cm 和时间 t s 的函数关系式为 $s=3\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\frac{\pi}{3}\right)$，其中 g 为重力加速度. 要使小球摆动的周期为 1 s，求 l 的值.

数学实验

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的动态图象

用“超级画板”或其他有类似功能的软件，可在计算机屏幕上作出函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的动态图象．拖动参数 A，ω 和 φ，能观察到图象随参数变化的情形．

操作步骤如下：

1．输入函数表达式：在右键菜单里单击“函数或参数方程曲线”，在打开的对话框里选“$y=f(x)$”，在激活的输入栏里填写 $a*\sin(b*x+c)$，曲线的点数设置为 1 000，参数范围为 -15 到 15，单击“确定”．

2．作出可控制参数点：作坐标点$(a,-1)$，$(b,-2)$，$(c,-3)$，顺次标注为 A，ω 和 φ．自这三点分别向 y 轴引垂线．

3．再作出 $\cos x$ 的曲线，作为比较．线型可选择虚线．

4．测量变量 a，b，c，在测量值显示框里将等号左边的变量名分别改为 A，ω 和 φ．

5．加上标题“正弦波的振幅、频率和相角”和“$y=A\sin(\omega x+\varphi)$”，再添加上其他必要的说明．

6．用鼠标分别拖动点 A，ω 和 φ，或选择其中一点用左右箭头键驱动，观察图象的变化（如图 3-40）．

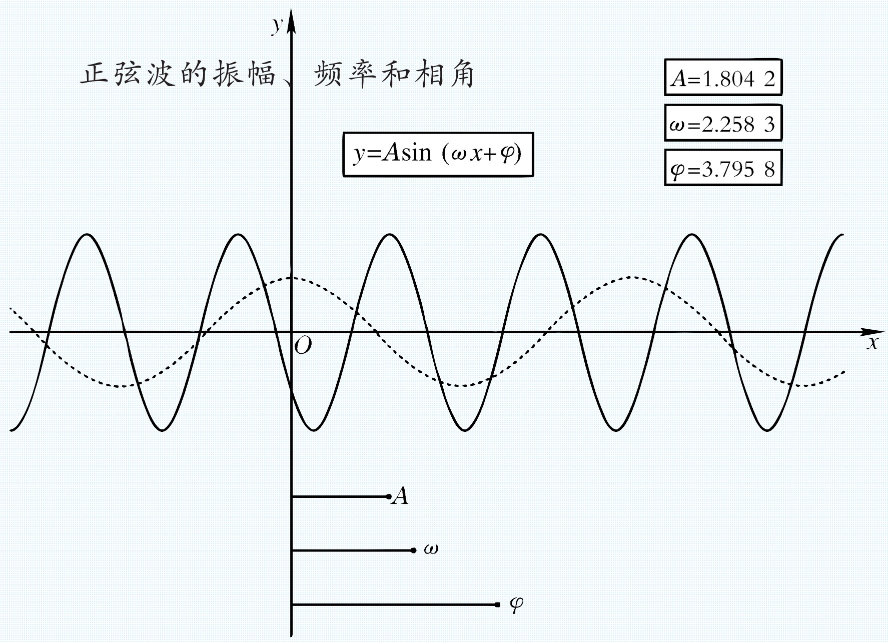


图 3-40

图中虚线是$y=\cos x$的图象.

调整参数A, ω和φ，使动态曲线和虚线尽可能重合. 这时，三个参数的值分别是多少？

阅读与思考

月球绕地球转动一周需要多少天

问题 月球绕地球转动一周需要多少天？

我们知道月球绕地球转动，又看到月亮有圆有缺．月球自己不发光，它正对太阳的那一面受到太阳光的照射，我们看起来才是亮的．月球背对太阳的那一面就是黑暗的，我们看不见．阴历初一时我们看不到月亮，称为**新月**（New Moon），是因为此时月球在太阳与地球之间，我们正对月亮的黑暗面．阴历十五我们看见圆圆的月亮，称为**满月**（Full Moon），这说明此时地球在太阳与月亮之间，我们正对月亮的光明面．从某一个满月到下一个满月，就是月圆月缺变化的一个周期，也就是阴历的一个月．从日历上可以发现，阴历的一个月有的 30 天，有的 29 天，因此月圆月缺的一个周期应是 29 天多．从日历上查阅到，阴历的新年（正月初一）到下一个新年共 354 天，平均每月 354/12＝29.5（天）．更精确的资料是平均每月 29.53 天．中国古代天文学将月圆月缺的这个周期称为**朔望月**．

月球围绕地球转动，位置发生变化，有时月亮在太阳与地球之间，有时地球在太阳与月亮之间，因此有缺有圆．

照此说来，月球绕地球一圈的周期岂不就是一个朔望月，约等于 29.53 天吗？

假如只是月球绕地球转动，地球相对于太阳的位置不变，如图 3-41(a)，则月球绕地球转一圈的周期确实就是一个朔望月，约等于 29.53 天．

但除了月球绕地球转动之外，地球还在绕太阳转动，转动一圈约 365.242 2 天．

如图 3-41(b)，假定太阳在点 O，某个满月时月球与地球分别在点 M 和 E．点 O，E，M 成一条直线．经过 29.53 天到下一个满月时，地球绕太阳转到点 E_1，月球到了 M_1．由于仍是满月，点 O，E_1，M_1 仍应是一条直线．在这 29.53 天内，月亮经过了圆缺的一个周期．如果它正好绕地球转了一圈，只能到达图 3-41(b)中的点 N(其中 $E_1N /\!/ EM$)，而不能到达 M_1．既然它到达了 M_1，就说明月球绕地球不只旋转一圈，而是比一圈还多旋转了 $\angle NE_1M_1$．

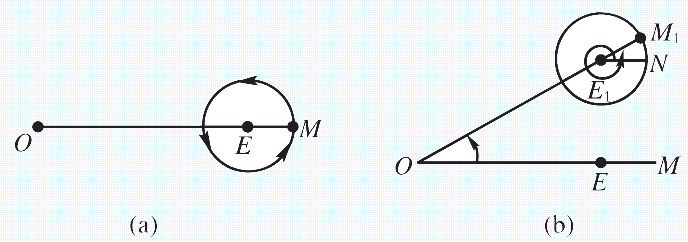


图 3-41

由于 $E_1N /\!/ OM$，故 $\angle NE_1M_1 = \angle EOE_1$．

地球从 E 转到 E_1 花了 29.53 天，而绕太阳转一周需365.242 2 天，故

$$\angle EOE_1 = \frac{29.53}{365.242\ 2} = 0.080\ 850\ 5\ (\text{周}).$$

因此，在一个朔望月的 29.53 天时间里，月球绕地球不只一周，而是 1.080 850 5 周．月球绕地球一周的时间应为

$$\frac{29.53}{1.080\ 850\ 5} \approx 27.32\ (\text{天}).$$

月球绕地球旋转一周的时间，中国天文学上称为**恒星月**．也就是假定在太阳系之外的恒星上看到的月球绕地球的一周的时间，约为 27.32 天，比一个朔望月的 29.53 天约少 2.2 天．

注意，在上面的计算中，本来可以将周角写成 360° 来计算 $\angle EOE_1$．但我们用“周”(即周角)作为单位来计算角，计算简单些，仍能得到正确的结果．

数学实验

电子琴为什么能模拟不同乐器的声音

你弹过电子琴吗？你想过没有：电子琴为什么能模拟各种不同的乐器（比如钢琴、小提琴、大提琴、长笛等）发出的声音？

要想模拟这些不同乐器的声音，首先要知道不同乐器发出的声音为什么不同.

在物理学中我们知道：

声音是由振动产生的.

乐音有三要素：响度，音调，音色.

响度反映声音的强弱. 它由振动的振幅决定. 振幅越大，声音就越强，响度就越大.

音调反映声音的高低. 它由振动的频率决定. 频率越高，也就是说振动越快，音调就越高.

音色反映什么？笛子发出的声音和小提琴发出的声音，男士和女士发出的声音，即使响度相同、音调相同，听起来也有明显的差别. 每个人讲话的声音也各有特点，与别的人不一样. 这个特点就是音色.

音色是由振动的什么特点决定的呢？

声音一般都不是单一的，而是由许多不同频率的声波合成的. 其中有一个频率最低的、振幅最大的声波，称为基音. 设它的频率为 f，则周期 $T=\frac{1}{f}$，可以用正弦函数

$$y=A_1\sin(2\pi fx+\varphi_1)$$

来表示. 除此之外还有许多其他频率的声波，它们的频率分别是基音频率 f 的整数倍 $2f$，$3f$，…，振幅随着频率的升高而降低，分别为 A_2，A_3，…，这些声波称为泛音，分别用正弦函数

$$y=A_2\sin(4\pi fx+\varphi_2),\quad y=A_3\sin(6\pi fx+\varphi_3),$$

$$\cdots,\quad y=A_k\sin(2k\pi fx+\varphi_k),\cdots$$

来表示．基音和所有的泛音合在一起，就是以上那些正弦函数的和

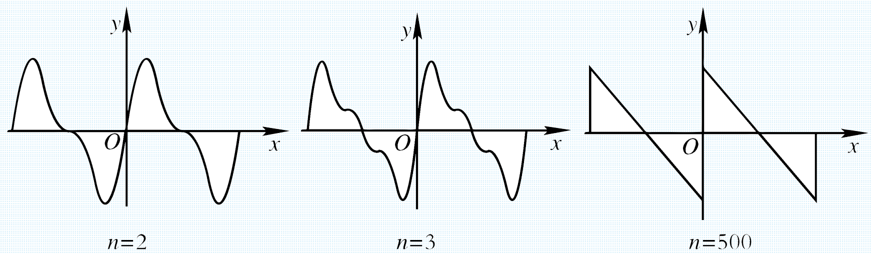
$$y=A_1\sin(2\pi fx+\varphi_1)+A_2\sin(4\pi fx+\varphi_2)+$$
$$\cdots+A_k\sin(2k\pi fx+\varphi_k)+\cdots \quad ①$$

由于各个正弦函数系数的比例不同，也就是各个泛音与基音的强弱的比例不同，就产生了不同的音色．

电子琴正是通过调整各个泛音响度的比例，来模拟各种不同的乐器（比如钢琴、小提琴、大提琴、长笛等）发出的声音．

为了体会按不同的响度比例将基音和泛音合成起来会产生什么效果，我们来观察不同的频率的正弦函数按不同比例叠加起来得到的函数图象．

比如 $y=\sin x$ 与 $y=\frac{1}{2}\sin 2x$ 的最小正周期分别是 2π，π．它们有公共周期 2π，将它们加起来得到的函数 $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$ 也有周期 2π．$y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 甚至 $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{1}{500}\sin 500x$ 都有周期 2π．用计算机画出它们的图象，如图 3-42：



$y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\cdots+\frac{1}{n}\sin nx$ 的图象

图 3-42

观察发现：随着 n 的增加，以 2π 为周期的函数

$$y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\cdots+\frac{1}{n}\sin nx$$

的图象越来越接近于“锯齿形”的波，由区间$[0,2\pi]$上的一条直线

同样是这些基音和泛音，按不同的比例配搭起来，就产生不同的音色．正如厨师炒菜一样，同样是油、盐、酱、醋、糖、酒、味精、辣椒、花椒这些佐料，不同的厨师来炒菜，放的比例不同，炒出来的菜的味道就不同．

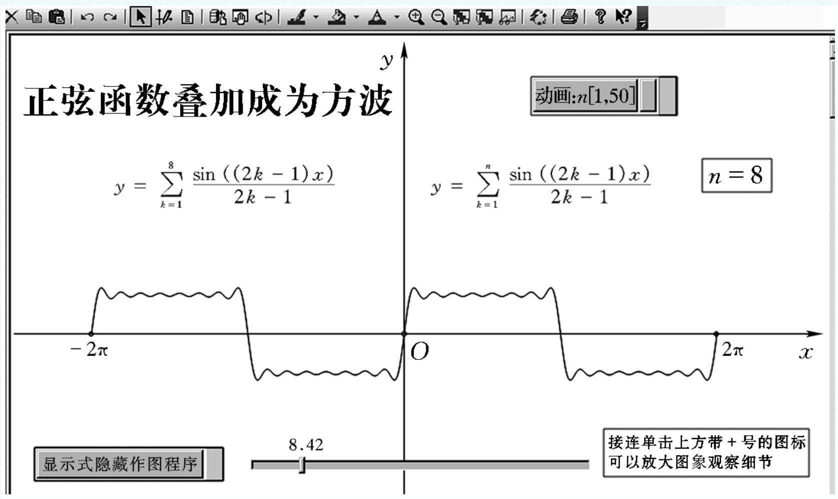
得出的效果一定会给你带来意外的惊奇！

段向左右两方不断地平行移动 2π 个单位长得到. 这个“锯齿形”的波是由正弦波 $\sin kx(0<k\in\mathbf{Z})$ 分别乘以系数 $\frac{1}{k}$ 之后叠加起来的.

我们试试另外一种方案：当 k 为奇数时将 $\sin kx$ 乘以 $\frac{1}{k}$，k 为偶数时将 $\sin kx$ 乘以 0，然后再加起来，得到下面的函数

$$y=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x,$$

也具有周期 2π. 用计算机画出图形来，看看它们是什么形状（如图 3-43）：



$y=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$ 的图象

图 3-43

观察的结果是否令你格外地惊奇：随着 n 的增加，函数图象接近于方形的波. 也就是说，方形波可以由正弦波叠加得出.

正弦波可以叠加出方形波、锯齿形波. 将具有周期 2π 的各个 $\sin kx(1\leqslant k\in\mathbf{Z})$ 以及 $\cos kx(0\leqslant k\in\mathbf{Z})$ 分别乘以适当的系数再加起来，更换这些系数就可以得到各种不同形状的波形.

也许你已经想到，假如不是将每个 $\sin kx$ 乘以 $\frac{1}{k}$ 而是乘以另外的系数，加起来之后还是有周期 2π，它的波岂不是应当有另外的形状吗？

想得好！你真聪明！

你也许会问：这样是否能得出以 2π 为周期的所有的周期函数的波形？

这个问题提得太棒了！你真是超级聪明，快赶上著名数学家傅立叶了！

小结与复习

一、指导思想

角是描述转动的量．三角函数描述了在转动过程中点的坐标的变化情况．借助单位圆有利于直观认识和探索三角函数的有关性质．三角函数是解决具有周期性变化规律的问题的有用工具．

二、内容提要

1．角的概念的推广：

（1）一条射线绕着它的端点，以逆时针方向旋转所成的角称为正角，以顺时针方向旋转所成的角称为负角，不旋转所成的角称为零角．

（2）象限角：角的顶点与直角坐标系的原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合，角的终边落在第几象限，则这个角就叫作第几象限角．

（3）终边相同的角所组成的集合：$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$．

2．弧度制：

（1）角度与弧度两种单位制之间的换算公式：1 弧度 $=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ 18'$，$1^\circ=\frac{\pi}{180}$弧度$\approx 0.017\,45$ 弧度．

（2）弧长公式：$l=|x|r$，其中 x 是半圆为 r 的圆的圆心角 α 的弧度数，l 是该圆心角所对的弧长．

3．任意角的三角函数：

（1）用比值表示：已知角 α 的终边上任意一点 P（不同于原点）的坐标为 (x, y)，$|OP|=r$．

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\qquad \cos\alpha=\frac{x}{r},\qquad \tan\alpha=\frac{y}{x}.$$

（2）用三角函数线表示：正弦线、余弦线、正切线.

4．同角三角函数之间的关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

5．诱导公式：

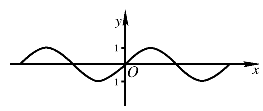
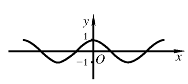
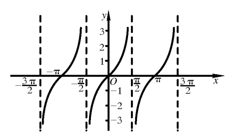
$k\pi\pm\alpha(k\in\mathbf{Z})$的三角函数值，等于 α 的同名函数值，前面添上一个把 α 当成锐角时原来函数值的符号. $\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha(k\in\mathbf{Z})$的三角函数值为：

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha.$$

6．三角函数的图象和性质：

（1）正弦函数、余弦函数、正切函数的图象和性质.

函数名称	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图象			
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\left\{x \mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbf{R}$
单调性	$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$递增 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$递减 $k\in\mathbf{Z}$	$[2k\pi-\pi,2k\pi]$ 递增 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ 递减 $k\in\mathbf{Z}$	$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$递增 $k\in\mathbf{Z}$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
周期性	$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$

（2）函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象和性质($\omega>0$，$A>0$).

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象可以由函数 $y=\sin x$ 的图象经过以下步骤得到：

1° 将正弦曲线 $y=\sin x$ 向左（$\varphi>0$）或向右（$\varphi<0$）平移

$|\varphi|$ 个单位；

2° 将所得的曲线 $y=\sin(x+\varphi)$ 上的每一点纵坐标不变，横坐标伸长（$0<\omega<1$）或缩短（$\omega>1$）为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍；

3° 再将所得的曲线 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 上每一点横坐标不变，纵坐标扩大($A>1$)或缩小($0<A<1$)为原来的 A 倍.

三、学习要求和需要注意的问题

1. 学习要求：

（1）了解任意角的概念和弧度制，能进行弧度与角度互化；

（2）借助单位圆理解任意角三角函数（正弦，余弦，正切）的定义；

（3）借助单位圆中的三角函数线推导出诱导公式 $\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha,\ \pi\pm\alpha,\ 2\pi-\alpha,\ -\alpha\right.$ 的正弦，余弦，正切$\left.\right)$，能画出 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 的图象，了解三角函数的周期性；

（4）借助图象理解正弦函数、余弦函数在 $[0,2\pi]$ 以及正切函数在 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上的性质；

（5）理解同角三角函数的基本关系式；

（6）结合具体事例，了解 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的实际意义；能借助计算器或计算机画出 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象，观察参数 A，ω，φ 对函数图象变化的影响；

（7）会用三角函数解决一些简单的实际问题，体会三角函数是描述周期性变化现象的重要函数模型.

2. 需要注意的问题：

（1）借助单位圆可以直观认识任意角的三角函数，理解三角函数的周期性、诱导公式、同角三角函数关系式以及探索三角函数的有关性质，因而要注意重视单位圆的作用；

（2）要注意充分利用计算器和计算机探索和解决相关问题，如求三角函数值，分析 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中参数变化对函数的影响等.

四、参考例题

例 1 如图 3-44 所示，已知半径为 1，圆心在坐标原点的圆上有 P，Q 两个动点，它们同时从圆上一点 A（1，0）出发，分别以每秒$\frac{\pi}{3}$和$\frac{\pi}{5}$的旋转角速度按逆时针方向旋转．设弦 PQ 的中点为 M，记 P，Q 运动的时间为 x s.

（1）当 $x=5$ 时，求$\angle QOM$ 的大小；

（2）当 $0\leqslant x\leqslant 6$ 时，试用 x 表示$|OM|$；

（3）当 $0\leqslant x\leqslant 6$ 时，求$|OM|$的最大值和最小值.

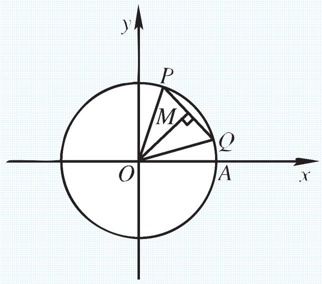


图 3-44

解 （1）当 $x=5$ 时，$\angle AOP=\frac{5\pi}{3}$，$\angle AOQ=\pi$.

∴ $\angle POQ=\frac{2\pi}{3}$，又因为 M 为 PQ 的中点，

∴ $OM\perp PQ$，∴ $\angle MOQ=\frac{1}{2}\angle POQ=\frac{\pi}{3}$.

（2）∵ $0\leqslant x\leqslant 6$，

∴ $0\leqslant\angle AOP\leqslant 2\pi$，

$0\leqslant\angle AOQ\leqslant\frac{6\pi}{5}$.

∴ $\angle AOP=\frac{\pi}{3}\cdot x$，$\angle AOQ=\frac{\pi}{5}\cdot x$.

∴ $\angle POQ=\angle AOP-\angle AOQ=\frac{2\pi}{15}\cdot x$.

∴ $\angle QOM=\frac{1}{2}\angle POQ=\frac{\pi}{15}\cdot x$.

在 Rt$\triangle QMO$ 中，$|OQ|=1$，

$\therefore$ $|OM|=|OQ|\cdot\cos\angle QOM$,

$\therefore$ $|OM|=\cos\dfrac{\pi}{15}x\quad(0\leqslant x\leqslant 6)$.

(3) 由 $|OM|=\cos\dfrac{\pi}{15}x\quad(0\leqslant x\leqslant 6)$,

$\therefore$ $0\leqslant\dfrac{\pi}{15}x\leqslant\dfrac{2\pi}{5}<\dfrac{\pi}{2}$. 故 $\cos\dfrac{\pi}{15}x$在 $[0,6]$ 上单调递减.

于是 当 $x=0$ 时,$|OM|_{\max}=1$.

当 $x=6$ 时,$|OM|_{\min}=\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

例 2 已知 $\cos(75°+\alpha)=\dfrac{3}{5}$,且 $75°+\alpha$ 是第四象限角,求 $\cos(105°-\alpha)+\sin(\alpha-105°)+\sin(15°-\alpha)$的值.

解 $\because$ $(75°+\alpha)+(105°-\alpha)=180°$,

$\therefore$ $(105°-\alpha)=180°-(75°+\alpha)$.

于是 $\cos(105°-\alpha)=\cos[180°-(75°+\alpha)]$

$$=-\cos(75°+\alpha)=-\frac{3}{5},$$

$\sin(\alpha-105°)=-\sin(105°-\alpha)$

$$=-\sin[180°-(75°+\alpha)]$$

$$=-\sin(75°+\alpha).$$

$\because$ $75°+\alpha$ 为第四象限角,

$\therefore$ $\sin(75°+\alpha)=-\sqrt{1-\cos^2(75°+\alpha)}=-\dfrac{4}{5}$.

$\therefore$ $\sin(\alpha-105°)=\dfrac{4}{5}$.

又$\because$ $(75°+\alpha)+(15°-\alpha)=90°$,

$\therefore$ $15°-\alpha=90°-(75°+\alpha)$.

$\therefore$ $\sin(15°-\alpha)=\sin[90°-(75°+\alpha)]=\cos(75°+\alpha)=\dfrac{3}{5}$,

$\therefore$ $\cos(105°-\alpha)+\sin(\alpha-105°)+\sin(15°-\alpha)$

$$=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4}{5}.$$

复习题三

学而时习之

1. 在单位圆中，角 α，β 的正弦线分别为 MP_1，MP_2，若 $MP_1+MP_2=0$，求 α，β 之间的等量关系.

2. 已知角 α 的终边上一点的坐标为 $\left(\cos\dfrac{\pi}{5},\ \sin\dfrac{\pi}{5}\right)$，利用单位圆求出角 α 的集合.

3. 已知 $\tan\alpha=2$，求 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ 的值.

4. 求下列各式的值：

(1) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta$；

(2) $(3\sin\theta+4\cos\theta)^2+(3\cos\theta-4\sin\theta)^2$.

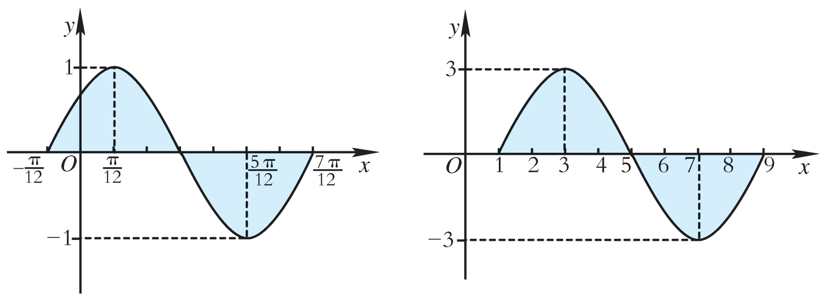
温故而知新

5. 已知 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{3}{5}$，且 $\dfrac{\pi}{4}-\alpha$ 为第二象限角，求 $\sin\left(\alpha-\dfrac{13\pi}{4}\right)+\sin\left(\alpha+\dfrac{21\pi}{4}\right)$ 的值.

6. 已知 $y=a-b\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最大值为 6，最小值为 -2. 求实数 a，b 的值.

7. 求函数 $y=\cos^2x-3\cos x+2$ 的最小值和最大值.

8. 下列各图（如图 3-45）是正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 的



(a) (b)

图 3-45

一个周期的图象，试分别求出它们的解析式.

9. 在匀强磁场中，匀速转动的线圈所产生的电流 I 是时间 t 的正弦函数，关系式为 $I=3\sin\left(\frac{1}{2}t+\frac{\pi}{6}\right)$，试求它的初始（$t=0$）电流，最大电流和周期.

10. 如图 3-46，一列简谐横波在 x 轴正方向传播，各质点振幅都是 2 cm. 某时刻相距 30 cm 的两质点 a，b 的位移都是 1 cm，只是速度方向相反，v_a 沿 y 轴负方向，v_b 沿 y 轴正方向. 由此推断，这列横波的波长最大可能是多少？

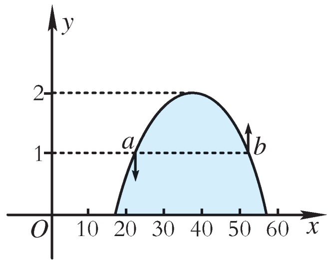


图 3-46

上下而求索

潮汐现象

为了对潮汐现象有更多了解，可以查阅资料. 最方便快捷地查阅资料的方式是到互联网上去搜索. 登陆一个网站，输入关键词“潮汐”，就可以查到大量的与潮汐有关的资料. 从中选取适当的资料，通过阅读这些资料研究如下问题以及你感兴趣的其他问题：

查阅沿海一个地方的若干天的海水深度与时间的关系的曲线图以及潮汐时间表.

观察研究曲线的形状，是否正弦曲线？是否以 24 h 为周期？如果不是，是否有另外某种规律？

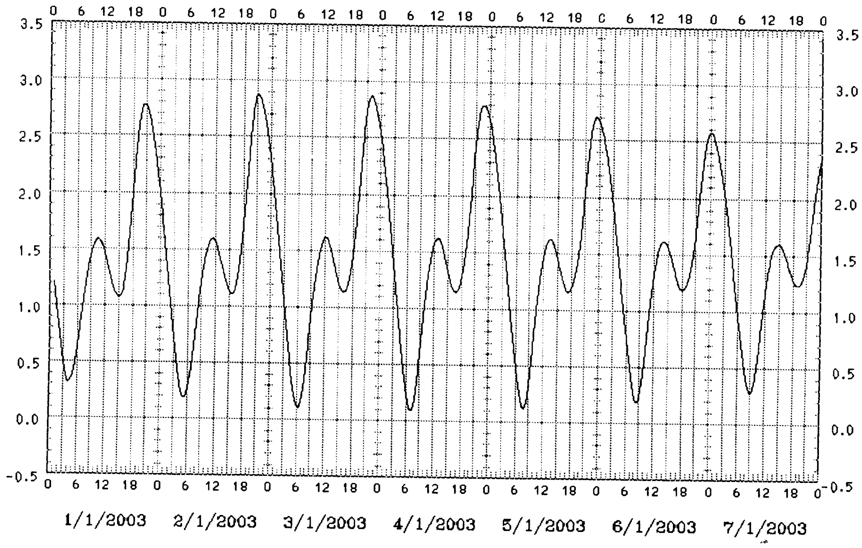
研究潮汐时间表，观察其中的规律. 是否每天的潮汐时间相同？如果不是，是否呈现周期性变化，周期是多长？

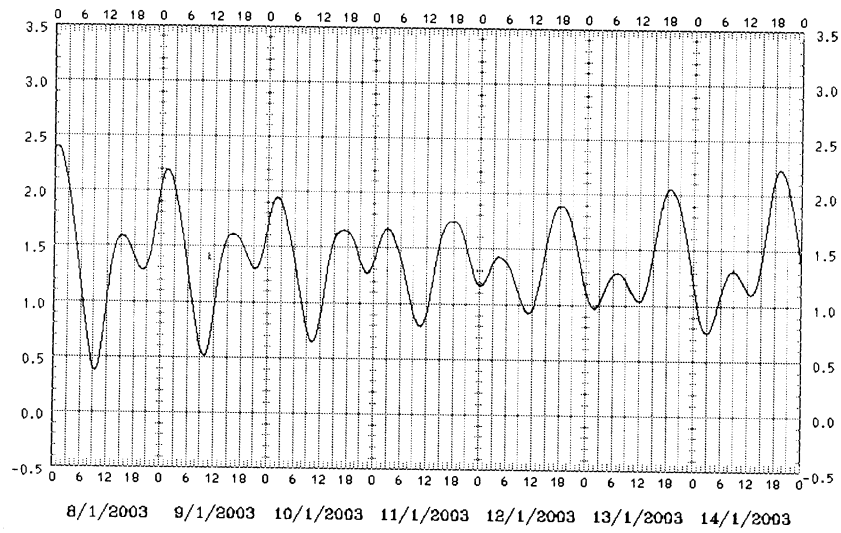
将你观察和研究的结果与 3.4.3 节例 2 相比较.

以下是我们下载的两份资料，供你参考. 你当然可以下载另外的资料来研究，并且可以与我们的资料进行比较.

沿海某地 2003 年 1 月 1 日（农历 11 月 29 日）至

2 月 4 日（农历正月初四）潮汐预报图





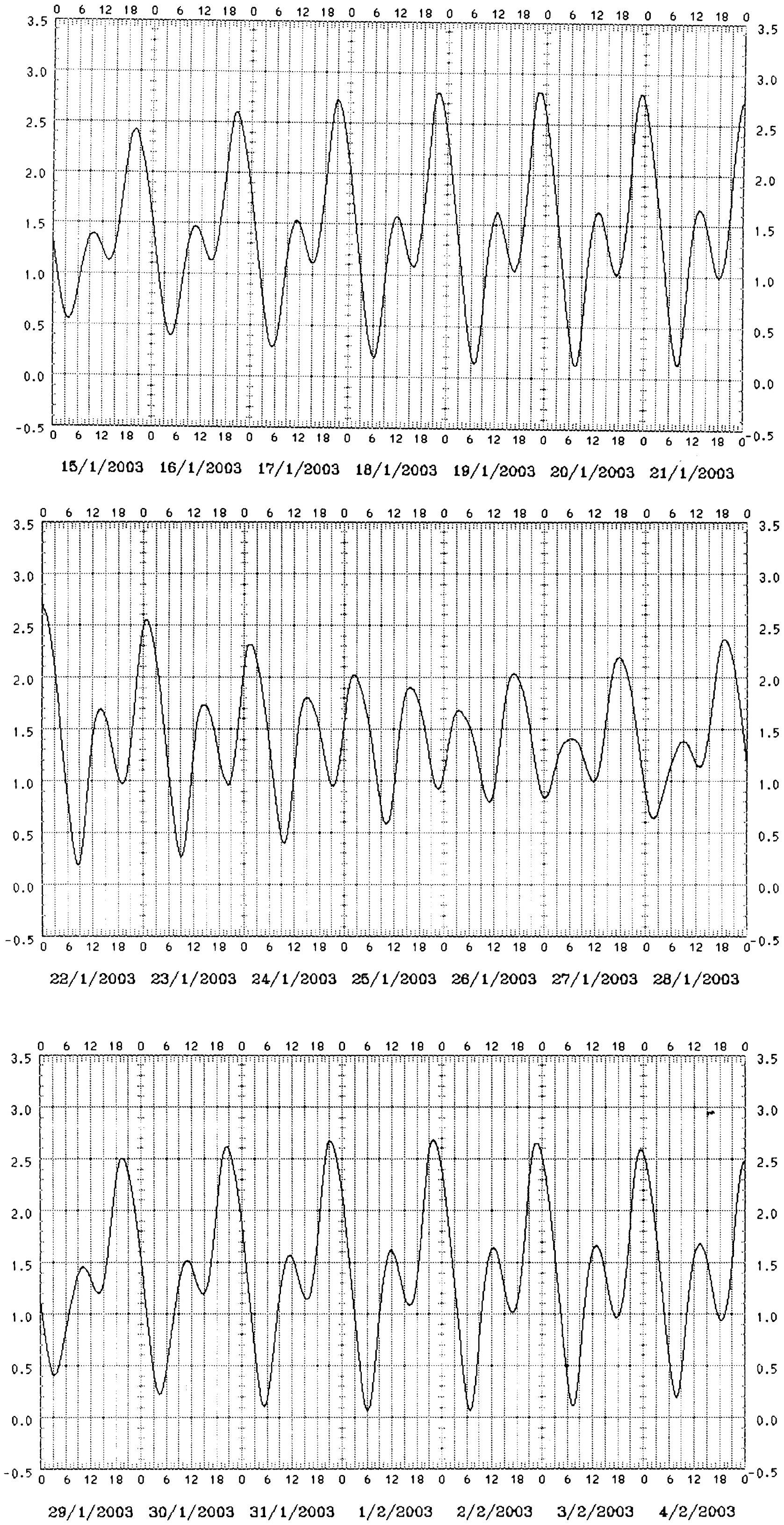

15/1/2003 16/1/2003 17/1/2003 18/1/2003 19/1/2003 20/1/2003 21/1/2003
22/1/2003 23/1/2003 24/1/2003 25/1/2003 26/1/2003 27/1/2003 28/1/2003
29/1/2003 30/1/2003 31/1/2003 1/2/2003 2/2/2003 3/2/2003 4/2/2003

图 3-47

潮汐时间有什么规律？你是否想知道其中的道理？

潮汐时间表按阴历日期编写而不按阳历日期编写，你觉得奇怪吗？其中有何奥妙？

沿海某地潮汐时间表

阴历日期	高潮时间	枯潮时间
初一　十六	10:21　22:21	4:09　16:09
初二　十七	11:09　23:09	4:57　16:57
初三　十八	11:57　23:57	5:45　17:45
初四　十九	12:45　0:45	6:33　18:33
初五　廿十	13:33　1:33	7:21　19:21
初六　廿一	14:21　2:21	8:09　20:09
初七　廿二	15:09　3:09	8:57　20:57
初八　廿三	15:57　3:57	9:45　21:45
初九　廿四	16:45　4:45	10:33　22:33
初十　廿五	17:33　5:33	11:21　23:21
十一　廿六	18:21　6:21	12:09　0:09
十二　廿七	19:09　7:09	12:57　0:57
十三　廿八	19:57　7:57	13:54　1:45
十四　廿九	20:45　8:45	14:33　2:33
十五　三十	21:33　9:33	15:21　3:21

通过阅读和研究从网上查阅的第一手资料，你会发现潮汐现象比3.4.3节例2所说的情况复杂得多．其中一个重要原因，是因为潮汐现象是由月亮和太阳共同引起的．由于地球自转，地球上的人看见太阳、月亮都在绕地球旋转．当太阳或月亮处于某一沿海地区 A 的上空最高点时，以及从这个位置旋转 180° 到 A 所正对的地球的另一面的位置 B 的上空最高点时，它都在地区 A 引起高潮．当它从 A 或 B 上空旋转 90° 到引起高潮的两个位置中间的位置时，就在地区 A 引起低潮．月球离地球更近，引起的潮汐比太阳引起的更大．由于月球围绕地球的转动，我们看见它在天空的运行比太阳慢一些．因此月亮与太阳在天空的相对位置是不断变化的．当太阳和月亮同时处于引起高潮的位置时，引起的高潮相互叠加，高潮最高；同时处于引起低潮的位置时，引起的低潮相互叠加，低潮最低．当月亮处于高潮位置而太阳处于低潮位置，或者月亮处于低潮位置而太阳处于高潮位置时，它们引起的高潮与低潮互相抵消一部分．

根据以上所说的道理，重新思考和研究你所查阅到的资料，看能不能有一些新的认识．

数学文化

数学家傅立叶

19世纪，属天才有成就的大数学家人数众多，数学史家赞叹说这些人可以组成一个军团．在这个名人军团当中，有一位了不起的将才，他就是法国大数学家傅立叶(Fourier，1768—1830)．正是他，创造性地提出把函数，哪怕是不连续函数用正弦函数或余弦函数的和来表达．

傅立叶是裁缝之子，八岁父母双亡，沦落为可怜的孤儿，被僧侣收养并进入一所军事学校接受教育，后参加拿破仑的远征军，被任命为埃及总督，回国后做过地方行政长官．在他任总督和市长期间，利用业余时间研究热的传导问题．这是他在埃及时就发生兴趣的一个问题．他在埃及的办公室里故意穿上许多衣服，弄得全身大汗淋漓，为的是体会热传导的规律．他的下属都笑他对热着了魔．据说他入迷地搞热传导实验加剧了他的心脏病，使得他只有63岁就辞别了人间．

1807年，傅立叶向法国科学院提交了一篇论文．其中的数学模型是从热传导这一实际模型提炼出来的．他的数学模型令法国科学院的大人物们目瞪口呆．傅立叶提出："随意画的一条曲线，定义在有限闭区间上的任何函数，可以分解成正弦函数和余弦函数的和．"他断言，对于区间$[-\pi, \pi]$上的任何函数$y=f(x)$，可以写成

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+$$
$$a_3\cos 3x+b_3\sin 3x+\cdots$$

a_0，a_i与$b_i(i=1,2,\cdots)$可用已知函数$f(x)$算出来．

科学院的数学家们对傅立叶的论断持怀疑态度．他的论文经过当时科学院的领袖级人物拉格朗日(Lagrange)、拉普拉斯

(Laplace)和勒让德（Legendre）的审查，被否定而退稿．这三位审稿人是当时数学界的绝对权威，号称名人 3L．但由于傅立叶运用他的数学论断研究热传导得到了与实验相符的结论而获法国科学院的巨额奖金．1811 年，傅立叶对 3L 的退稿进行了认真修改，再次投稿．科学院成立了一个包括 3L 在内的多人审查小组．该修改稿再次由于推理不严密而被“枪毙”，被《科学院研究报告》拒绝发表．傅立叶主张任何函数都可以表示成正弦函数与余弦函数的和，但是他把话说过了头．事实上，对于在有限闭区间只有有限个跳跃性间断点和有限个极值点的函数是可行的．

1822 年，傅立叶任法国科学院终生秘书．这一年他把 1811 年被否定的关于函数可以写成正弦函数与余弦函数和的论文修改稿和一部《热的解析理论》的专著一同出版．这两份文献是数学史上了不起的大作．《热的解析理论》就是利用函数可以用正弦函数与余弦函数的和来表达这一破天荒的数学方法研究热学的经典之作．伟大的物理学家麦克斯韦（C. Maxwell，1831—1879）称傅立叶的论著是“一部伟大的数学史诗”．

傅立叶一辈子忠厚诚挚，乐于助人，被数学界广为称道．当他以科学院秘书长的身份发现他的前任埋没了青年数学家阿贝尔的成就时，十分内疚．在他的极力主张下，科学院把大奖补发给对代数作出了重大贡献的挪威数学家阿贝尔．

傅立叶的学术成就和为人深受世人的敬仰和爱戴．第二次世界大战期间，纳粹法西斯把傅立叶的铜像熔化．战后法国人民自动捐款制作了傅立叶的巨型浮雕．1968 年，法国政府举行了纪念傅立叶诞辰 200 周年大会，纪念这位孤儿出身自学成才的伟大科学家．

第4章

向　　量

方向距离一笔挥，
茫茫大海系安危.
展开合并等闲算，
勾股余弦未足奇.

向量是沟通代数、几何与三角函数的一种工具.

向量刻画了几何图形的最基本要素——点的相对位置.

向量的代数运算是处理几何、物理以及其他领域内问题的一个有力工具.

既然向量是工具，掌握它就是为了用它来解决问题.

数学建模

怎样描述位置的变化

问题：一艘船从港口 O 出发，航行了 100 km 到港口 A，又航行了 160 km 到达 B 时，遇到意外情况需要派直升机援救，直升机应到何处去寻找该船？

假如直升机从港口 A 派出，就需要以 A 为基准点，通过描述从 A 点到 B 点的位置变化来描述 B 点的位置．也就是说，要向直升机下达命令，告诉它从 A 点出发怎样到达 B 点．

已经知道船从 A 到 B 航行了 160 km，假如还知道船从 A 到 B 是直线航行，那么从 A 到 B 的距离就是 160 km．命令直升机从 A 出发飞行 160 km，它能直达 B 点找到那艘船吗？

不行！

只告诉直升机从 A 出发的飞行距离是 160 km，而不告诉它向什么方向飞，飞机就很有可能飞错方向，到不了 B 点．

不知道 A 到 B 的方向怎么办？进行调研．比如，通过无线电通讯向船员询问．

船员回答：

船从 A 出发向北偏东 60° 航行到现在的位置 B．

根据这个信息，命令直升机从 A 出发向北偏东 60° 飞行 160 km，到达的就一定是船所在的位置 B．

假如不能从港口 A 派出直升机，而只能从最开始出发的港口 O 派出直升机，那就告诉直升机从 O 出发沿什么方向飞行、飞行多远可以到达 B．

不知道从 O 到 B 的方向和距离怎么办？再次向船询问．

但是，船并没有直接从 O 航行到 B，不能提供从 O 到 B 的方

也许你会觉得这个“应用题”出错了．已知条件没有给够，没有讲清船航行的方向．题目要求的“到何处”意义也不明确．

但是，假如你已经毕业离校走上工作岗位，接到命令要派人驾驶飞机去救援这艘船的时候，你的任务就是要救人．你必须自己将“在何处”用清楚无误的语言来叙述，使飞行员可以按照你的命令找到船．你必须自己判断需要哪些信息（也就是“已知条件”）才能确定船的位置．如果信息不够，就要进行调研，包括向船上的人询问．

总之，你必须自己将这个实际问题用数学语言描述出来，变成一个数学问题——数学模型．

向和距离，只提供了如下的信息：

从 O 出发向南偏东 75° 方向航行了 100 km 到达港口 A，然后向北偏东 60° 方向航行了 160 km 到达现在的位置 B.

根据这个信息，你是否会命令直升机“从 O 出发向南偏东 75° 方向飞行 100 km，然后向北偏东 60° 方向飞行 160 km”，让它重复船的航行路线而到达 B 点呢？

这显然太笨，太浪费时间，也许就会耽误对船的救援.

正确的做法应当是：让直升机从 O 出发直接飞向 B 点.

但这就需要知道由 O 到 B 的方向和距离.

你能不能由已经知道的这些信息得出由 O 到 B 的方向和距离？

你愿意试一下吗？

比如，按一定比例画出船的航行路线图，然后在图上去度量.

或者，将船的航行分解为东西方向和南北方向两个运动来考虑，算出从 O 到 B 在东西方向上运动了多远、在南北方向上运动了多远.

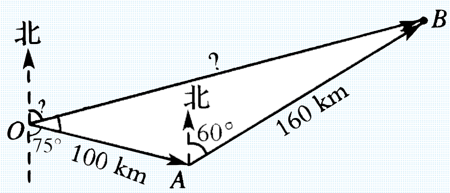


图 4-1

现在试不出来也没有关系，让我们一起来探索.

建立这个数学模型的过程就是数学建模. 然后利用数学知识和一切可利用的资源解决这个数学问题.

答案是否正确，是否切实可行，最终要靠实践来检验：

只有快速准确地找到船，完成救助任务，才是正确合理的解答.

4.1 什么是向量

在本章开始的“数学建模”中，为了描述需要救援的船所在的位置 B，需要先选取一个已知的点 A（直升机出发点）作为基准点，再通过描述从 A 到 B 位置的变化来确定 B 点的位置.

描述从 A 到 B 位置变化的量称为**位移**（displacement），记作$\overrightarrow{AB}$.

要描述位移$\overrightarrow{AB}$，一要说清楚它的方向，也就是从 A 到 B 的方向；二要说清楚它的大小，也就是线段 AB 的长度，记作 $|\overrightarrow{AB}|$. 我们也用 $|AB|$ 来表示普通线段 AB 的长度.

像位移这样既有大小又有方向的量称为**向量**（vector），也称为**矢量**.

除了位移以外，物理中还有许多量需要考虑大小和方向，如速度、加速度、力，它们都是向量.

“方向距离一笔挥”，向量的方向和大小都画在这条有向线段上了.

从一点 A 到另一点 B 的位移可以画一条从 A 到 B 的线段来表示，并且为这条线段规定一个方向，就是从 A 到 B 的方向，如图 4-2. 这样一条规定了方向的线段称为**有向线段**（directed line segment），记为$\overrightarrow{AB}$，以区别于只考虑长度、不考虑方向的普通线段 AB.

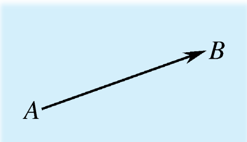


图 4-2

不但位移可以用有向线段来表示，别的向量也都可以用有向线段来表示，有向线段的方向表示这个向量的方向，有向线段的长度表示这个向量的大小.

也可以只用一个字母表示向量，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{F}$. 这里，为了与表示数量的字母相区别，将表示向量的字母用黑体印刷或在顶上标箭头. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小也称为这个向量的**模**(module)，记作 $|\boldsymbol{a}|$.

例 一艘货船从港口 O 出发，先向南偏东 75°航行了 100 km 到 A，再向北偏东 60°航行了 160 km 到 B. 一艘快艇也从港口 O 出发，向北偏东 60°方向航行了 160 km 到 C，接到命令要求立即从 C 直接航行到 B 去与货船会合. 快艇从 C 出发应当朝向什么方向、航行多远，

才能到达 B 点？

解　按一定比例画出两艘船的航行路线，如图 4-3.

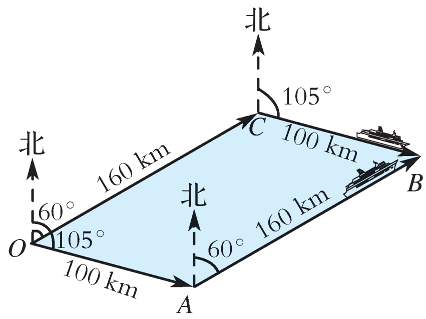


图 4-3

图中货船从 A 到 B 的航行与快艇从 O 到 C 的航行的方向都是北偏东 60°，距离都是 160 km. 有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的方向相同、长度也相等. 因此线段 AB，OC 相互平行且相等，四边形 $OABC$ 是一个平行四边形. 它的另一组对边 CB，OA 也应当平行且相等，有向线段 $\overrightarrow{CB}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 的方向和长度相同，所表示的位移都是南偏东 75°方向，距离 100 km. 因此，快艇从 C 到 B 的方向也应当是南偏东 75°方向，航行距离应当是 100 km.

在上面的例子中，位移 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的方向、长度都相等，尽管它们的出发点不同，但仍然是相等的位移，可以写成等式

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}.$$

同样的道理，有等式 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}$.

可见，如果说位移 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A'B'}$ 相等，并不要求有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A'B'}$ 重合，只要它们的方向和长度都相同就行了. 特别地，当它们不在同一条直线上时，就是要求四边形 $ABB'A'$ 是平行四边形. 但是，如果已经知道两条有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A'B'}$ 表示相等的位移（即方向相同、长度相等），并且起点 A 与 A' 重合，那么它们的终点 B 与 B' 也就重合.

一般地，既然对向量只考虑它的大小和方向，在用有向线段表示向量时，**从不同的起点出发的有向线段，只要它们的长度和方向相同，表示的向量就相等.** 因此，可以将有向线段做平行移动，保持它的方向和长度不变，而将它的起点移动到任意位置.

从同一点出发，向同样的方向，走同样的距离，必然到达同一个目的地.

向量只有两要素：方向、大小. 只管方向和大小，不计较出发点.

练　习

1. 质量、速度、位移、力、加速度、路程、密度、功这些物理量中，哪些量是向

量，哪些量不是向量？

2. 一艘客船从港口出发，向南偏东 30°航行了 100 km，然后向北偏东 30°航行了 200 km；另一艘客船从港口出发，向北偏东 30°航行了 200 km，再向南偏东 30°航行了 100 km. 两船是否到达同一地点？

习题 1

学而时习之

1. 在正$\triangle ABC$中，P，Q，R 分别是 AB，BC，CA 的中点，则与向量$\overrightarrow{PQ}$相等的向量是（　　）

(A) $\overrightarrow{PR}$与$\overrightarrow{QR}$　　(B) $\overrightarrow{AR}$与$\overrightarrow{RC}$

(C) $\overrightarrow{RA}$与$\overrightarrow{CR}$　　(D) $\overrightarrow{PA}$与$\overrightarrow{QR}$

2. 某人从点 A 出发向西走 400 m 到达点 B，然后改变方向朝西北方向走 600 m 到达点 C，最后又向东走 400 m 到达点 D.

(1) 按 1∶10 000 的比例作出向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{CD}$；

(2) 求 $|\overrightarrow{DA}|$ 的值.

温故而知新

3. 如图 4-4，多边形 $ABCDEF$ 是正六边形，O 是它的中心. 从这个正六边形的一个顶点到另一个顶点所作的所有向量中，哪些与$\overrightarrow{AO}$相等，哪些与$\overrightarrow{AC}$相等？哪些向量的模与 $|\overrightarrow{AO}|$ 相等，哪些向量的模与 $|\overrightarrow{AC}|$ 相等？

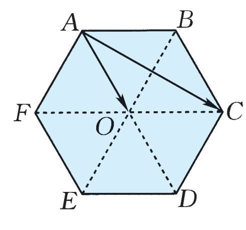


图 4-4

4.2　向量的加法

在本章开始的“数学建模”的例子中提出了这样一个问题：船从 O 航行到 A，再从 A 航行到 B. 已经知道两段航行$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{AB}$的方向和距离，如何求出从出发点 O 到最后到达的点 B 的位移$\overrightarrow{OB}$的方向和大小？

我们暂时还不能通过计算来得出$\overrightarrow{OB}$的方向和距离，只是通过作图来解决这一问题：以向上的方向代表正北方向，从点 O 出发向南偏东 $75°$方向按一定比例作有向线段$\overrightarrow{OA}$，使它的长度代表 100 km，再从 A 出发向东偏北 $30°$作有向线段$\overrightarrow{AB}$，使它的长度代表 160 km. 连接 OB，如图 4-5.

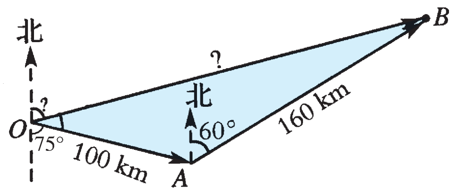


图 4-5

在图上量出$\overrightarrow{OB}$的长度及其与正北方向之间所成的角度.

既然位移$\overrightarrow{OB}$是位移$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{AB}$合在一起的总的效果：先从 O 移动到 A，再从 A 移动到 B，总的结果就是从 O 移动到 B，我们就定义$\overrightarrow{OB}$为$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{AB}$之和，写作

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}.$$

对平面上任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，可以按同样的方法定义它们的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$：

任取一个起点 O，从 O 出发作向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，再从 A 出发作向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，如图 4-6 所示，则从 O 到 B 的向量$\overrightarrow{OB}$就定义为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

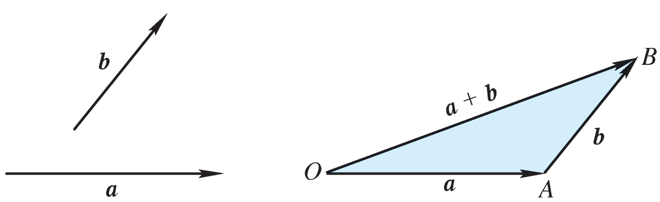


图 4-6

求向量的和的运算称为**向量的加法**（addition of vectors）．上面所述通过将两个向量首尾相接作出它们的和的方法叫作向量加法的**三角形法则**（triangle rule）．

例 1　（1）设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是任意向量，作出向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ 并进行比较，它们是否相等？

（2）设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是任意向量，作出向量 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$ 及 $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ 并进行比较，它们是否相等？

解　（1）作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$．

作 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}$，则 $\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$．如图 4-7．

通过作图发现点 D 与点 B 重合，从而 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ 相等．

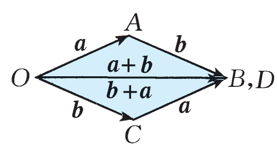


图 4-7

但这是偶然的还是必然的？换成另外的 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 再作图，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ 还相等吗？

试着换一种作图方式如下：

作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$，连接 CB．

如果你能证明 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$，那就得到了

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\text{（向量加法的交换律）}.$$

证明过程中用到平行四边形的判定和性质定理．这一事实说明向量加法的交换律暗藏了平行四边形的判定和性质定理．

证明　$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow$ 四边形 $OABC$ 是平行四边形

$\Rightarrow OA$，CB 平行且相等 $\Rightarrow\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$

$\Rightarrow\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$．

（2）作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$（如图 4-8），则

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}.$$

于是

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$（向量加法的结合律）

对任意的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 成立．

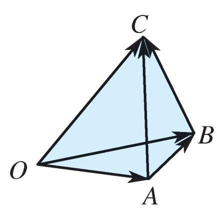


图 4-8

在例 1 中，通过作图和几何推理证明了

定理 1　向量的加法满足交换律和结合律．即

（1）**加法交换律**（commutative law of addition）：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ 对

任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 成立.

(2) **加法结合律** (associative law of addition)：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$对任意三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 成立.

由于结合律成立，我们可以将$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$都写作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，并且可以将三角形法则推广到求三个以至于多个向量的和的情形. 例如，要求作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，只要从一点 O 出发，依次作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$(如图 4-9).

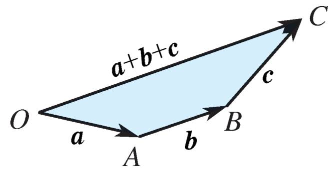


图 4-9

例 2　$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$是从同一点出发的两个向量，求作它们的和.

解　从第一个向量$\overrightarrow{OA}$的终点 A 出发作向量$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$，则$\overrightarrow{OC}$就是所求的和，如图 4-10.

注意　例 2 中从 A 出发作$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$，也就是以 OA，OB 为一组邻边作平行四边形 $OACB$，而所求的和$\overrightarrow{OC}$就是这个平行四边形的一条对角线. 因此，例 2 的作图方法可以总结如下：

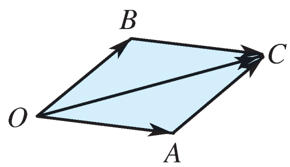


图 4-10

平行四边形法则 (parallelogram rule)：从同一点 O 出发分别作向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，以 OA，OB 为一组邻边作平行四边形 $OACB$，则平行四边形的对角线 OC 所代表的向量$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

平行四边形法则与三角形法则是向量加法的两种不同的作图法则，但这两种法则作图的效果是相同的，同样都是合理的. 解决问题时可以根据需要选用其中任何一个法则.

练　习

1. 如果$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$，试说明在什么情况下，$AD$ 是$\angle BAC$ 的角平分线.
2. 如果 $\boldsymbol{a}$ 表示“向东走 2 km”，$\boldsymbol{b}$ 表示“向西走 2 km”，$\boldsymbol{c}$ 表示“向南走 2 km”，$\boldsymbol{d}$ 表示“向北走 2 km”. 试说明某人经过下列位移之后，他在出发点的什么方向

上，离出发点多远.

（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；（2）$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$；（3）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$；（4）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$.

从 A 到 B 再到 A：走去又走回，一步也没移.

比如位移的大小为 1 m，一定是向某个确定的方向移动 1 m，不可能同时也向别的方向移动．但如果移动 0 m，可以认为在每个方向上都移动 0 m.

有的书也称 $-\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量．但这并非说 $\boldsymbol{a}$ 是正的、$-\boldsymbol{a}$ 是负的，只是说它们的和为 $\boldsymbol{0}$.

特别地，零向量的相反向量（负向量）等于它本身.

例 3　已知 A，B 是任意两点，求$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$.

解　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\boldsymbol{0}$.

有向线段$\overrightarrow{AA}$的长度为 0．所表示的位移是从 A 移动到 A，也就是没有移动．所表示的向量的大小为 0，称为**零向量**(zero vector)，记作$\boldsymbol{0}$ 或$\vec{0}$．零向量与任意一个向量 $\boldsymbol{a}$ 的和等于这个向量本身：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

大小不为零的向量都有确定的方向，但零向量没有确定的方向.

向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BA}$大小相等，方向相反，和为$\boldsymbol{0}$．$\overrightarrow{BA}$称为$\overrightarrow{AB}$的**相反向量**（opposite vector），记为$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$．同理，$\overrightarrow{AB}$也是$\overrightarrow{BA}$的相反向量，$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$．一般地，每一个向量 $\boldsymbol{a}$ 都有唯一的相反向量$-\boldsymbol{a}$，使 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$，$-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 大小相等，方向相反.

由向量的加法可以定义向量的减法.

与数的减法类似，向量的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 就是满足条件 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 的向量 $\boldsymbol{x}$．向量的减法可以化为加法来做：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

要验证 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，只要证明 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$与 $\boldsymbol{b}$ 之和等于 $\boldsymbol{a}$．计算可知

$$[\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})]+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+[(-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}]=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}.$$

可见$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$确实等于 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

例 4　用作图法求$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

解　如图 4-11，$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$是这样一个向量，它与$\overrightarrow{OA}$相加等于$\overrightarrow{OB}$．由$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$，立即得到

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}.$$

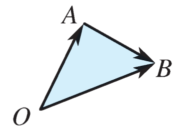


图 4-11

为了表示平面上点的位置，我们可以在平面上取定一个点 O 作为基准点，称为**原点**（origin）．将平面上每个点 A 都用从 O 到 A 的向量$\overrightarrow{OA}$来表示，称为 A 的**位置向量**（position vector）．不同的点有不同的位置向量．反过来，对每个向

量 $\boldsymbol{a}$，以 $\boldsymbol{a}$ 为位置向量可以作出唯一的一个点 A，使 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$.

平面上那些不从原点 O 出发，而从任一点 A 出发到任一点 B 的向量 $\overrightarrow{AB}$，怎样用位置向量来表示呢？例 4 中的等式 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，告诉我们：

从 A 到 B 的向量 $\overrightarrow{AB}$ 等于它的终点 B 的位置向量减去起点 A 的位置向量.

点 A，B 的位置用位置向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 表示，位置的改变 $\overrightarrow{AB}$ 自然应当用位置向量的差来表示.

练习

1. 对任意的 $\triangle ABC$，计算 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.
2. 化简：（1）$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}$；　　（2）$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$.

习题 2

学而时习之

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，作向量 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. 试根据几何图形回答，你作出的这两个向量的夹角是多少？
2. 求证：对任意向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 和 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geqslant||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$ 成立.
3. 将向量 $\boldsymbol{a}$ 转动一个角 θ 得到向量 $\boldsymbol{b}$，如果 $0<\theta<2\pi$，且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$ 是什么向量？
4. 设 O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心，试用向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OE}$ 表示向量 $\overrightarrow{OF}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$.

温故而知新

5. 一位模型赛车手遥控一辆赛车向正东方向前进 1 m，顺时针方向转 60°；沿直线前行 1 m，再顺时针方向转 60°；继续沿直线前行 1 m，…；如此操作 6 次.

（1）按 1∶100 的比例，用向量表示赛车的位移；

（2）观察赛车位移示意图，你能发现什么？

6. 两个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 的夹角为直角，且它们的合力 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F}_1$ 的夹角为 60°，$|\boldsymbol{F}|=10$ N. 求 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 的大小.

4.3 向量与实数相乘

一、向量与实数相乘

例 1 设一艘船上午 8：00 开始以 v km/h 的速度向东北方向航行，中午 12：00 的时候船在一个已知的地点 O. 当天下午 13：30 它在何处？当天上午 10：00 它在何处？

解 以 O 为原点，设船下午 13：30 在 P 点，上午 10：00 在 Q 点. 只要分别说明 P，Q 在 O 的什么方向、离 O 多远，就将 P，Q 的位置描述清楚了，也就是用位移向量 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ 来描述 P，Q 的位置.

船的速度是 v km/h，就是说它每小时向东北方向航行 v km，每小时航行的位移 $\boldsymbol{v}$ 是一个指向东北方向、长度为 v 的向量，它也就是表示船的航行速度的方向和大小的向量，称为速度向量.

以中午 12：00 为计算时间的起点. 从中午 12：00 到下午 13：30 航行了 1.5 h，位移 $\overrightarrow{OP}$ 就应当是每小时的位移 $\boldsymbol{v}$ 的 1.5 倍，记作 $1.5\boldsymbol{v}$，它的方向还是东北方向，长度 $|OP|$ 为 v 的 1.5 倍，即 $1.5v$ km. P 在 O 的东北方向 $1.5v$ km 处.

上午 10：00 在中午 12：00 之前 2 h，表示为 −2 h. 从 O 点退回去到 Q 点的位移 $\overrightarrow{OQ}$，应当是每小时前进的位移向量 $\boldsymbol{v}$ 的 −2 倍，记作 $-2\boldsymbol{v}$，显然它的方向与 $\boldsymbol{v}$ 相反，在西南方向. 长度 $|OQ|$（也就是“退回去”两小时走的距离）应为 $2v$. 因此，Q 在 O 的西南方向 $2v$ km 处（如图 4-12）.

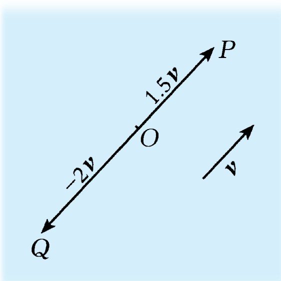


图 4-12

在例 1 中，我们将速度向量 $\boldsymbol{v}$ 乘以时间来计算位移向量. 在几何中也可以类似地求向量的若干倍. 比如，将表示向量$\overrightarrow{OA}$的有向线段 OA 在原方向延长 1.5 倍到 B，使 $|OB|=1.5|OA|$，就说$\overrightarrow{OB}$是$\overrightarrow{OA}$的 1.5 倍，记作$\overrightarrow{OB}=1.5\overrightarrow{OA}$. 若$\overrightarrow{OB'}=-1.5\overrightarrow{OA}$，则是在有向线段 OA 的反向延长线上截取 $|OB'|=1.5|OA|$ 得到. 如果取 OA 的中点 M，则$\overrightarrow{OM}$可以认为是$\overrightarrow{OA}$的一半，即$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$. 而$\overrightarrow{OM'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$的终点 M'，则应当在有向线段OA的反向延长线上长度为$|OM'|=\frac{1}{2}|OA|$的地方. 如图 4-13.

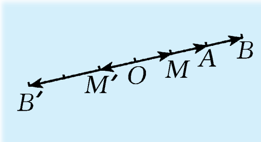


图 4-13

一般地，实数与向量按下面的法则相乘：

将向量 $\boldsymbol{v}$ 乘以一个正数 λ，得到一个向量 $\lambda\boldsymbol{v}$，它的方向与 $\boldsymbol{v}$ 相同，长度 $|\lambda\boldsymbol{v}|$ 是 $|\boldsymbol{v}|$ 的 λ 倍.

将向量 $\boldsymbol{v}$ 乘以一个负数 λ，得到一个向量 $\lambda\boldsymbol{v}$，它的方向与 $\boldsymbol{v}$ 相反，长度 $|\lambda\boldsymbol{v}|$ 是 $|\boldsymbol{v}|$ 的 $|\lambda|$ 倍.

向量 $\boldsymbol{v}$ 乘以 0 得到的 $0\boldsymbol{v}$ 是零向量.

例 2　从任一点 O 出发作已知向量$\overrightarrow{OA}$.

（1）求作$\overrightarrow{OB}=-2\overrightarrow{OA}$；

（2）在直线 OA 上任取一点 O'，作$\overrightarrow{O'C'}=1.5\overrightarrow{OA}$；

（3）在直线 OA 外任取一点 O_1，求作$\overrightarrow{O_1B_1}=-2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{O_1C_1}=1.5\overrightarrow{OA}$；

（4）看一看：你作出的这些有向线段与有向线段 OA 有怎样的位置关系？在同一条直线上？与所在的直线相交、平行？

想一想：若$\overrightarrow{OA}$的任一实数倍$\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{OA}$，则直线 PQ 与OA有怎样的位置关系？

解　（1），（2），（3）如图 4-14.

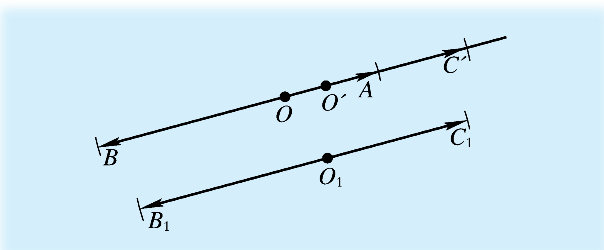


图 4-14

（4）有向线段OB，$O'C'$与OA在同一条直线上. O_1B_1，O_1C_1所在直线与OA平行.

二、向量的平行

一般地，如果有向线段$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{PQ}$的方向相同或相反，那么它们所在的直线 OA，PQ 重合或者平行．如果非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反，我们既可以将它们用同一条直线上的有向线段表示，也可以将它们用相互平行的有向线段表示．

因此，当非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反时，我们既称 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ **共线**（collinear），也称 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ **平行**（parallel）．

零向量的方向可以任意规定．我们规定：**零向量与所有的向量平行.**

按照向量与实数乘法的法则，任一向量 $\boldsymbol{a}$ 与它的任一实数倍的方向相同或相反，因此，

$\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 平行.

反过来，设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 平行，则当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}=0\boldsymbol{b}$；当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{b}=0\boldsymbol{a}$．如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都不为 $\boldsymbol{0}$，取 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，则当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相同时，$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$；方向相反时，$\boldsymbol{b}=-\lambda\boldsymbol{a}$．总之，有

两个向量平行 $\Leftrightarrow$ 其中一个向量是另一个向量的实数倍.

根据这个结论，可以将平面几何中的共线和平行关系，用向量与实数的乘法来描述．

例 3　如图 4-15，设 A，B，C 三点不共线，将下列几何事实用向量语言来描述．

（1）四边形 $ABCD$ 是平行四边形；

（2）四边形 $ABCE$ 是梯形，其中 AB，EC 是梯形的两底；

（3）M 是 BC 的中点；

（4）G 在线段 AM 上，且 $AG:GM=2$；

（5）Q 在 MA 的延长线上．

解　（1）$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$．

（2）存在正实数 $\lambda\neq1$，使$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{EC}$．

（3）$\overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$．

（4）$\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GM}$；或$\overrightarrow{MG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{MA}$．

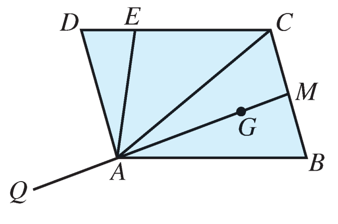


图 4-15

（5）$\overrightarrow{MQ}=\lambda\overrightarrow{MA}$，其中 $\lambda>1$；或$\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AM}$，其中 $\lambda<0$.

练　习

1. 在$\triangle ABC$中，已知$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$，求作：（1）$2\boldsymbol{b}$；（2）$2\boldsymbol{c}$；（3）$2(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$.
2. 已知四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$，试判断四边形 $ABCD$ 的形状.
3. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个不平行的向量，试确定 $\boldsymbol{e}=2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{f}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件.

问题　已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不平行，λ 是任意非零实数.

从任意一个已知点 O 出发，作向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OA'}=\lambda\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB'}=\lambda\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC'}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$. 如图 4-16.

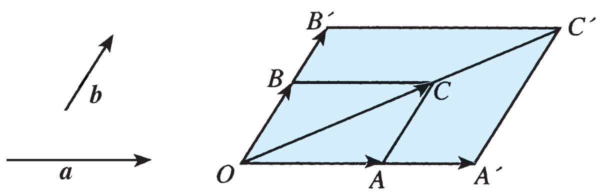


图 4-16

1. 当 $\lambda>0$ 时：

（1）观察你所作的向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 有什么关系？后者是否是前者的实数倍？多少倍？

你能否证明你通过观察猜出的结论？证明过程中用到什么几何定理？

（2）用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 分别表示出向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{A'B'}$，向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{A'B'}$之间有什么关系？后者是否是前者的实数倍？多少倍？

你能否证明你通过观察猜出的结论？证明过程中用到什么几何定理？

> 证明过程中要用到关于三角形相似的定理，说明关于向量与实数相乘的分配律暗藏了关于三角形相似的几何定理.

2. 对 $\lambda<0$ 的情形，将前面所说的过程再做一遍.

一般地，我们有

定理 2　向量与实数的乘法满足以下运算律：

（1）设 $\boldsymbol{a}$ 是任意向量，x，y 是任意两个实数，则

$$(x+y)\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{a}, \qquad x(y\boldsymbol{a})=(xy)\boldsymbol{a}.$$

（2）设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是任意两个向量，λ 是任意实数，则

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

如果你有兴趣，试着自己画出图来，并借助于几何定理证明这两个运算律.

例 4 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不平行，试解释等式

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$

的几何意义.

解 从点 O 出发作

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}.$$

则 M，N 分别是 OA，OB 的中点. 连接 AB，MN，则 MN 是 $\triangle OAB$ 的中位线（如图 4-17），且

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}.$$

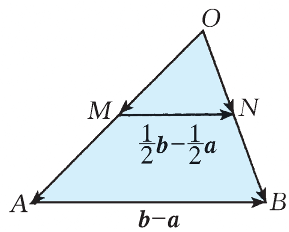


图 4-17

因此，

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$

的几何意义是

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

即 △*OAB* 的中位线 *MN* 平行于底边 *AB*，且等于底边的一半.

如此简单的等式 $\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ 居然代表了这么一个几何定理. 你觉得神奇吗?

例 5 取定原点 O，已知点 A，B 的位置向量分别是 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，求 AB 的中点 M 的位置向量 $\overrightarrow{OM}$.

解 如图 4-18，由 O 出发经 A 走到 M，得到

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}.$$

其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

而 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，

故 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

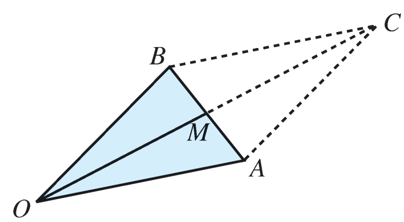


图 4-18

$$=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

例 5 的结果可以叙述为：A，B 中点的位置向量等于 A，B 位置向量的平均值.

以 OA，OB 为邻边作 $\square OACB$，则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$. OC 是 $\square OACB$ 的一条对角线，而 AB 是这个平行四边形的另一条对角线. 因此，例 5 的结果 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ 的几何意义是：AB 的中点 M 也就是 OC 的中点. 即

一不小心就算出了一个几何定理!

平行四边形的对角线互相平分.

例 6　求证：梯形的中位线平行于两底，其长度等于两底长度的平均值.

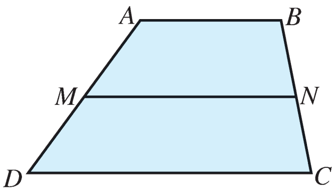


图 4-19

证明　如图 4-19，四边形 $ABCD$ 是梯形，AB，DC 是两条底边. 两腰 AD，BC 的中点分别是 M，N. MN 是中位线.

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}, \quad ①$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}, \quad ②$$

$$M\text{ 是 }AD\text{ 中点}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\boldsymbol{0}, \quad ③$$

$$N\text{ 是 }BC\text{ 中点}\Leftrightarrow\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\boldsymbol{0}. \quad ④$$

从 M 到 N：南北的路都要走一走.
向北：$M\to A\to B\to N$
向南：$M\to D\to C\to N$

将①，②两式相加再除以 2，并将③，④代入，得

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}). \quad ⑤$$

“梯形两底 AB，DC 平行”这一条件可用向量语言描述为：存在实数 $\lambda>0$，使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{DC}$.

代入⑤可知

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\lambda\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC})=\frac{1+\lambda}{2}\overrightarrow{DC}.$$

这说明向量 $\overrightarrow{MN}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 方向相同. 显然线段 MN 与 DC 不共线，因此 $MN/\!/DC$.

且因 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DC}$ 方向相同，由⑤式得

$$|MN|=\frac{1}{2}(|AB|+|DC|).$$

三、单位向量

例 7　已知非零向量 $\boldsymbol{a}$.

(1) 求与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同且长度为 1 的向量 $\boldsymbol{a}^{\circ}$;

(2) 求与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反且长度为 3 的向量 $\boldsymbol{b}$.

解　(1) 取 $\boldsymbol{a}^{\circ}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{a}^{\circ}$与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同，且长度为

$$|\boldsymbol{a}^{\circ}|=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=1.$$

(2) $-3\boldsymbol{a}^{\circ}=-\dfrac{3}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}^{\circ}$的方向相反，因而与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反，且显然 $|-3\boldsymbol{a}^{\circ}|=3$. 因此 $\boldsymbol{b}=-\dfrac{3}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.

长度为 1 的向量称为**单位向量**（unit vector）. 我们知道，向量有两个要素：大小和方向. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小由 $|\boldsymbol{a}|$ 表示，而它的方向就由该方向上的单位向量$\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 代表.

例 8　已知△ABC 及其两边长 $|AB|=c$，$|AC|=b$. 怎样用向量的语言描述：点 E 在∠BAC 的角平分线上？

分析　分别在 AB，AC 上截取长度相等的线段 AB_0，AC_0. 以 AB_0，AC_0 为邻边作▱$AB_0E_0C_0$，则▱$AB_0E_0C_0$ 是菱形，它的对角线 AE_0 平分∠BAC.

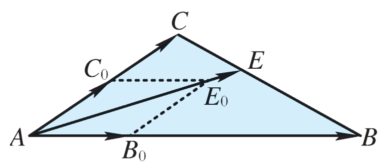


图 4-20

解　分别在$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$上取单位向量$\overrightarrow{AB_0}=\dfrac{1}{c}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC_0}=\dfrac{1}{b}\overrightarrow{AC}$. 作它们的和

$$\overrightarrow{AE_0}=\overrightarrow{AB_0}+\overrightarrow{AC_0}=\frac{1}{c}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{b}\overrightarrow{AC},$$

则▱$AB_0E_0C_0$ 是菱形，它的对角线 AE_0 平分∠BAC.

点 E 在∠BAC 的角平分线上

$\Longleftrightarrow\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AE_0}$，对某个实数 $\lambda\geqslant0$ 成立

$\Longleftrightarrow\overrightarrow{AE}=\lambda\left(\dfrac{1}{c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{b}AC\right)$，对某个实数 $\lambda\geqslant0$ 成立.

练　习

1. 在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CB}=4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，试判断此四边形的形状.
2. 在▱$ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$，$O$ 是 AC 与 BD 的交点，点 M 在 BD 上，$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$. 试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{AM}$.

习题 3

学而时习之

1. 已知△ABC，记 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}$.

   (1) 求作：$\overrightarrow{AB_1}=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC_1}=\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AB_2}=-1.5\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC_2}=-1.5\boldsymbol{c}$；

   (2) 向量$\overrightarrow{B_1C_1}$，$\overrightarrow{B_2C_2}$分别与$\overrightarrow{BC}$有什么关系？利用向量运算证明你的结论；

   (3) 线段 B_1C_1，B_2C_2 分别与 BC 有什么位置关系和长度关系？
2. 已知△ABC，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}$.

   (1) 求作：$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}$；

   (2) M 是线段 BC 的什么点？G 是△ABC 的什么点？
3. 已知线段 AB，试根据下列描述说出 M，N 的位置.

   (1) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$；

   (2) $\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AB}$，其中 $0<\lambda<1$.
4. 化简：

   (1) $6(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})+9(-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；

   (2) $\frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)-\frac{7}{6}\left(\boldsymbol{a}+\frac{3}{7}\boldsymbol{b}\right)$.
5. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个不平行的向量，且$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 若

A，B，D 三点共线，求 k 的值.

6. 设两个非零向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不平行，若 $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BC}=6\boldsymbol{e}_1+23\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CD}=4\boldsymbol{e}_1-8\boldsymbol{e}_2$. 求证：$A$，$B$，$D$ 三点共线.

温故而知新

7. 四边形 $ABCD$ 是任意四边形. M，N，P，Q 分别是四边 AB，BC，CD，DA 的中点. 依次连接 MN，NP，PQ，QM. 记 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}$，$\boldsymbol{d}=\overrightarrow{AD}$.

(1) 用 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 表示出向量 $\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AN}$，$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{QP}$；

(2) 通过比较 $\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{QP}$，试判断四边形 $MNPQ$ 的形状.

8. O，A，B 是平面上任意三点，且 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，$\lambda$ 是正实数. 若 P 是线段 AB 上的点且满足条件 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，请利用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示出向量 $\overrightarrow{OP}$.

$\left(\text{提示：}\overrightarrow{AP}=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}.\right)$

9. 在 $\triangle ABC$ 中，D，E，F 分别是边 BC，CA，AB 的中点，O 是任意一点，且 $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$. 求证：(1) $\overrightarrow{AG}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 共线；(2) G 是 $\triangle ABC$ 三条中线的交点.

10. 已知 $\triangle ABC$ 及任一点 O，点 P 满足条件

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{1}{|AB|}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{|AC|}\overrightarrow{AC}\right)，\lambda>0.$$

则射线 AP 经过 $\triangle ABC$ 的（　　）

(A) 外心　　(B) 内心　　(C) 重心　　(D) 垂心

4.4 向量的分解与坐标表示

现在我们设法解决本章一开始的“数学建模”中提出的问题：

例 1　如图 4-21，一艘船从港口 O 出发向南偏东 75° 航行了 100 km到港口 A，然后向北偏东 60° 航行了 160 km 到达 B. 问 B 在 O 的什么方向，与 O 相距多远？

分析　已经知道了$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB}$的方向和距离，要求$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$的方向和距离.

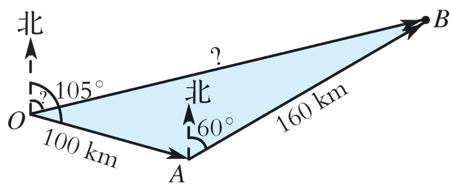


图 4-21

如果$\overrightarrow{AB}$也是南偏东 75°方向，与$\overrightarrow{OA}$方向相同，则$\overrightarrow{OB}$是南偏东 75°方向 100+160=260(km).

如果$\overrightarrow{AB}$的方向是北偏西 75°，与$\overrightarrow{OA}$方向相反，则$\overrightarrow{OB}$是南偏东 75°方向 100+(−160)=−60(km)，即北偏西 75°方向 60 km.

现在的问题是$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB}$的方向既不相同也不相反，不能将这两个向量的加法化为两个实数的加法来计算. 但我们可以将$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB}$分别分解为东西方向和南北方向的运动，再将东西方向和南北方向的位移分别相加.

解　将$\overrightarrow{OA}$分解为向东的位移$\overrightarrow{OA_1}$和向南的位移$\overrightarrow{A_1A}$之和，如图 4-22(a)，$\overrightarrow{AB}$分解为向东的位移$\overrightarrow{AB_1}$和向北的位移$\overrightarrow{B_1B}$之和，如图 4-22(b).

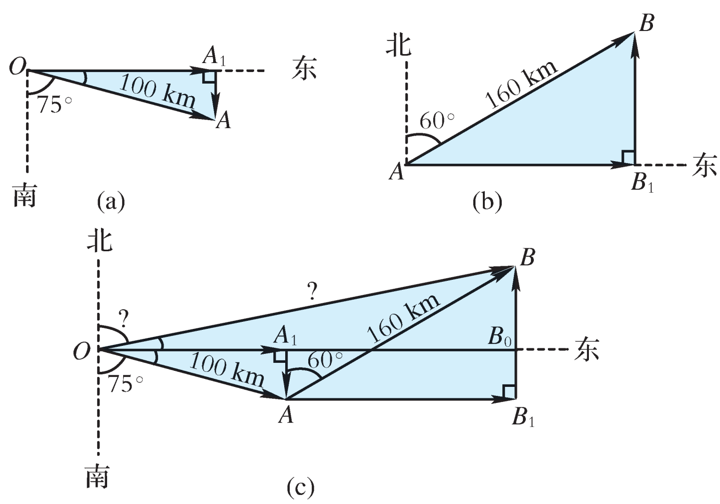


图 4-22

我们来求$|OA_1|$，$|A_1A|$，$|AB_1|$，$|B_1B|$.

在 Rt△OA_1A 中(如图 4-22(a))，$\angle A_1OA=90^\circ-75^\circ=15^\circ$，$|OA|=100$ km. 故

$$|OA_1|=100\cos 15^\circ=96.59(\text{km}),$$

$$|A_1A|=100\sin 15^\circ=25.88(\text{km}).$$

在 Rt$\triangle AB_1B$ 中（如图 4-22（b）），$\angle B_1AB=90^\circ-60^\circ=30^\circ$，$|AB|=160$ km．故

$$|AB_1|=160\cos 30^\circ=138.56(\text{km}),$$

$$|B_1B|=160\sin 30^\circ=80(\text{km}).$$

要将$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A}$与$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1B}$相加，可将它们在东西方向的位移$\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{AB_1}$加在一起，南北方向的位移$\overrightarrow{A_1A}$，$\overrightarrow{B_1B}$加在一起，再求它们的和．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{AB_1}&=\text{向东 } 96.59 \text{ km}+\text{向东 } 138.56 \text{ km}\\&=\text{向东 }(96.59+138.56)\text{ km}\\&=\text{向东 } 235.15 \text{ km}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{B_1B}&=\text{向南 } 25.88 \text{ km}+\text{向北 } 80 \text{ km}\\&=\text{向北 }(-25.88+80)\text{ km}\\&=\text{向北 } 54.12 \text{ km}.\end{aligned}$$

这样，$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{AB}$的和$\overrightarrow{OB}$＝向东 235.15 km＋向北 54.12 km．设$\overrightarrow{OB_0}$＝向东 235.15 km，则$\overrightarrow{B_0B}$＝向北 54.12 km，如图 4-22（c）．于是

$$\begin{aligned}|OB|&=\sqrt{|OB_0|^2+|B_0B|^2}\\&=\sqrt{235.15^2+54.12^2}\\&=241.30(\text{km}),\end{aligned}$$

$$\tan\angle B_0OB=\frac{54.12}{235.15}=0.230\ 16,\quad \angle B_0OB=12^\circ 58'.$$

其中$\angle B_0OB$ 是 OB 与正东方向所成的角．在航海中，$\overrightarrow{OB}$的方向要由它与正北方向所成的角（北偏东的角度）$90^\circ-\angle B_0OB=77^\circ 2'$来描述．

因此，B 在 O 的北偏东 $77^\circ 2'$方向，与 O 相距 241.30 km．

例 1 解法获得成功，是将所有的位移都分解为东西方向和南北方向的位移之和．如果将向东 1 km 的位移记作 $\boldsymbol{e}_1$，向北 1 km 的位移记作 $\boldsymbol{e}_2$，则

$$\overrightarrow{OA_1}=\text{向东 } 96.59 \text{ km，可写为 } 96.59\boldsymbol{e}_1,$$

$$\overrightarrow{A_1A}=\text{向南 } 25.88 \text{ km，可写为 }-25.88\boldsymbol{e}_2.$$

这样，$\overrightarrow{OA}=96.59\boldsymbol{e}_1+(-25.88)\boldsymbol{e}_2$，

$\overrightarrow{AB}=138.56\boldsymbol{e}_1+80\boldsymbol{e}_2$，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB}&=(96.59+138.56)\boldsymbol{e}_1+(-25.88+80)\boldsymbol{e}_2\\&=235.15\boldsymbol{e}_1+54.12\boldsymbol{e}_2.\end{aligned}$$

所有的位移向量都写成了 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的倍向量之和，将它们相加时只要将系数相加就行了，就好比初中数学中合并同类项一样.

我们可以进一步将$\overrightarrow{OA}=96.59\boldsymbol{e}_1+(-25.88)\boldsymbol{e}_2$ 简记为(96.59，−25.88)，称为$\overrightarrow{OA}$的坐标. 同样，$\overrightarrow{AB}=138.56\boldsymbol{e}_1+80\boldsymbol{e}_2$ 也用它的坐标（138.56，80）来表示. 直接用

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}&=(96.59,-25.88)+(138.56,80)\\&=(96.59+138.56,-25.88+80)\end{aligned}$$

来计算两个向量的和.

这样看起来比刚才轻松愉快多了！

上面是将平面上的位移向量分解为两个单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的倍向量之和 $x\,\boldsymbol{e}_1+y\,\boldsymbol{e}_2$，并且将系数排列起来，记为$(x,y)$，称为这个位移向量的坐标. 为叙述方便，我们将一组向量的倍向量之和称为这些向量的**线性组合**（linear combination）. 比如，$x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$ 就是 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的线性组合.

类似地，在处理同一平面内的力的时候，也经常将它们分解为两个相互垂直的方向上的分力之和，也就是写成两个方向互相垂直、大小都是 1 N 的力的线性组合.

一般地，我们有

定理 3　设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是平面上两个互相垂直的单位向量，则

（1）平面上任意一个向量 $\boldsymbol{v}$ 都可以分解为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的线性组合：$\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，其中 x，y 是两个实数.

（2）两个向量 $\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$ 相等的充分必要条件是：$a=x$ 且 $b=y$.

证明　（1）任意取定一点 O，过 O 作有向直线 Ox 与 $\boldsymbol{e}_1$ 方向相同，有向直线 Oy 与 $\boldsymbol{e}_2$ 方向相同. 从 O 出发作有向线段$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{v}$，过 P 作与 Oy 平行或重合的直线 PM. 因为 Oy 与直线 Ox 相交，PM 也与

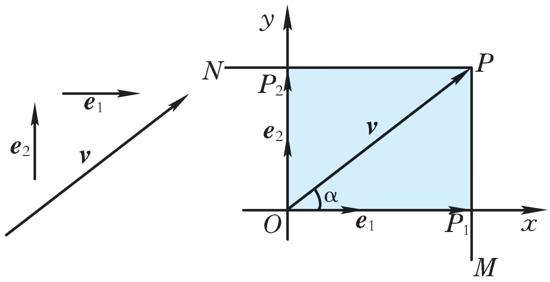


图 4-23

直线 Ox 相交于某一点 P_1，过 P 作与 Ox 平行或重合的直线 PN，则 PN 与直线 Oy 相交于某一点 P_2.

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2},$$

$\overrightarrow{OP}$被分解为与 $\boldsymbol{e}_1$ 平行的向量$\overrightarrow{OP_1}$和与 $\boldsymbol{e}_2$ 平行的向量$\overrightarrow{OP_2}$之和.

$\overrightarrow{OP_1}$与 $\boldsymbol{e}_1$ 平行，可以写成 $\boldsymbol{e}_1$ 的实数倍：$\overrightarrow{OP_1}=x\boldsymbol{e}_1$. $\overrightarrow{OP_2}$与 $\boldsymbol{e}_2$ 平行，可以写成 $\boldsymbol{e}_2$ 的实数倍：$\overrightarrow{OP_2}=y\boldsymbol{e}_2$. 于是

$$\boldsymbol{v}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2.$$

$\boldsymbol{v}$ 被分解成了 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的线性组合 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$.

(2) 将两个表达式

$$\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2,$$

$$\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2$$

的两边分别相减，当 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$ 时，就得到

$$\boldsymbol{0}=(x-a)\boldsymbol{e}_1+(y-b)\boldsymbol{e}_2.$$

反设 $x\neq a$，则 $x-a\neq 0$，所以由上式可得 $\boldsymbol{e}_1=-\dfrac{y-b}{x-a}\boldsymbol{e}_2$. 由此可得 $\boldsymbol{e}_1$ 是 $\boldsymbol{e}_2$ 的实数倍，因而 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 平行或共线，与原假设矛盾. 所以 $x=a$. 同理可证 $y=b$.

定理 3 可以理解为：任意取定两个互相垂直的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 作为“尺”，可以“度量”平面上任何一个向量 $\boldsymbol{v}$，得出两个“量数” x，y. 我们将 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 称为一组**基**（basis），用这组基去“度量”每一个向量 $\boldsymbol{v}$，也就是将 $\boldsymbol{v}$ 写成这组基的线性组合 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，得到的两个“量数” x，y 组成一组 (x, y)，称为 $\boldsymbol{v}$ 的**坐标**（coordinates）. 坐标 (x, y) 由两个数 x，y 组成，x 称为它的第一分量（也称第一坐标），y 称为它的第二分量（也称第二坐标）.

向量的坐标与点的坐标有密切的联系：

我们知道，取定一个基准点 O 作为原点，则任何一点 P 的位置可以由位置向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示.

现在，我们再取两个互相垂直的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 组成一组基，将位置向量 $\overrightarrow{OP}$ 用坐标（x，y）来表示：$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，则这个坐标也就表示了点 P 的位置. 实际上，以 O 为原点，分别以 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的方向作为 x 轴和 y 轴的正方向，以 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的共同长度作为单位长，建立平面直角坐标系，则 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标（x，y）也就是点 P 在这个直角坐标系中的坐标.

在建立直角坐标系时，通常规定从 x 轴的正方向绕原点旋转到 y 轴正方向所成的角为 $+90°$，也就是沿逆时针方向旋转 $90°$. 为了与这个规定保持一致，我们也规定 $\boldsymbol{e}_2$ 由 $\boldsymbol{e}_1$ 绕其起点沿逆时针方向旋转 $90°$得到.

反过来，如果先建立了一个平面直角坐标系，设 x 轴正方向上的单位向量为 $\boldsymbol{e}_1$，y 轴正方向上的单位向量为 $\boldsymbol{e}_2$，则 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 就组成平面上的一组基，点 P 在这个坐标系中的坐标（x，y）就是从原点 O 到点 P 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 在这组基下的坐标.

例 2　设平面上建立了直角坐标系，O 是原点. P 点的坐标是（x_1，y_1），Q 点的坐标是（x_2，y_2）. $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 分别是 x 轴、y 轴正方向上的单位向量. 以 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 为基.

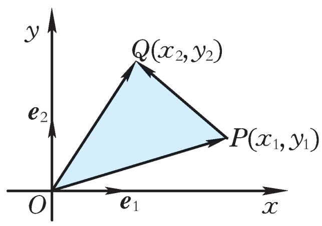


图 4-24

（1）写出 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ 的坐标；

（2）求向量 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}$，$3\overrightarrow{OP}$，$3\overrightarrow{OP}+4\overrightarrow{OQ}$ 的坐标；

（3）求向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的坐标.

解　（1）$\overrightarrow{OP}$ 的坐标就是点 P 的坐标$(x_1,\ y_1)$，$\overrightarrow{OQ}$ 的坐标就是点 Q 的坐标$(x_2,\ y_2)$.

实际上，易见 $\overrightarrow{OP}=x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{OQ}=x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2$.

（2）
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}&=(x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2)+(x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2)\\&=(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_1)+(y_1\boldsymbol{e}_2+y_2\boldsymbol{e}_2)\\&=(x_1+x_2)\boldsymbol{e}_1+(y_1+y_2)\boldsymbol{e}_2,\end{aligned}$$

因而　$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ 的坐标为(x_1+x_2,y_1+y_2).

同理，可得

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=(x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2)-(x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2)$$
$$=(x_1-x_2)\boldsymbol{e}_1+(y_1-y_2)\boldsymbol{e}_2,$$

坐标为(x_1-x_2, y_1-y_2).

$$3\overrightarrow{OP}=3(x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2)=3x_1\boldsymbol{e}_1+3y_1\boldsymbol{e}_2,$$

坐标为$(3x_1, 3y_1)$.

$$3\overrightarrow{OP}+4\overrightarrow{OQ}=3(x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2)+4(x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2)$$
$$=(3x_1+4x_2)\boldsymbol{e}_1+(3y_1+4y_2)\boldsymbol{e}_2,$$

坐标为$(3x_1+4x_2, 3y_1+4y_2)$.

(3) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(x_2-x_1)\boldsymbol{e}_1+(y_2-y_1)\boldsymbol{e}_2$,

坐标为(x_2-x_1, y_2-y_1).

就好比说：
张同学身高＝1.70，
李同学身高＝1.65，
实际上是
张同学身高＝1.70 m，
李同学身高＝1.65 m.
要计算两位同学身高的差，只要计算
1.70－1.65＝0.05
就知道身高的差为0.05 m.

预先取定了基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 之后，我们将每个向量 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$ 用它的坐标(x, y)表示，以后可以直接写 $\boldsymbol{v}=(x, y)$.

设$\overrightarrow{OP}=(x_1, y_1)$，$\overrightarrow{OQ}=(x_2, y_2)$，则

$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2),$$
$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=(x_1, y_1)-(x_2, y_2)=(x_1-x_2, y_1-y_2),$$
$$3\overrightarrow{OP}=3(x_1, y_1)=(3x_1, 3y_1).$$

向量的运算被转化为坐标的运算，也就是转化为数的运算．这里，坐标的运算按如下法则进行：

两个坐标相加减，将它们的两个分量分别相加减：

$$(x_1, y_1)\pm(x_2, y_2)=(x_1\pm x_2, y_1\pm y_2)$$

一个数与坐标相乘，将这个数分别乘上坐标的每个分量：

$$a(x, y)=(ax, ay)$$

向量平行的坐标表示：

我们用$\overrightarrow{OP}/\!/\overrightarrow{OQ}$来表示两个向量$\overrightarrow{OP}=(x_1, y_1)$，$\overrightarrow{OQ}=(x_2, y_2)$平行（也就是共线）．现在也可以直接写成$(x_1, y_1)/\!/(x_2, y_2)$来表示这两个向量平行．而这就意味着其中一个坐标是另一个坐标的实数倍，也就是说它们的坐标成比例，即 $x_1y_2=y_1x_2$ 成立．总结为

$$(x_1,y_1)//(x_2,y_2)\Leftrightarrow x_1y_2-y_1x_2=0$$

我们知道了从原点 O 出发的向量$\overrightarrow{OP}$的坐标就是它的终点 P 的坐标，而且从例 2 还知道了：

设已按前述方式选定了基 e_1，e_2，并建立了相应的直角坐标系，则从任一点 $P(x_1,y_1)$ 到任一点 $Q(x_2,y_2)$ 的向量$\overrightarrow{PQ}$的坐标，等于这个向量的终点坐标减去起点坐标，为 (x_2-x_1,y_2-y_1).

例 3　判断：直角坐标平面上三点 $A(2,4)$，$B(4,3)$，$C(-2,6)$ 是否共线？

解
$$\overrightarrow{AB}=(4-2,3-4)=(2,-1),$$
$$\overrightarrow{AC}=(-2-2,6-4)=(-4,2).$$

由 $2\times2-(-1)\times(-4)=0$，知 $(2,-1)//(-4,2)$，$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AC}$.

故 A，B，C 三点共线.

例 4　已知直角坐标平面上点 $A(-3,4)$，$\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{OA}$方向相反且 $|OB|=3$. 求 B 点的坐标.

解　先求$\overrightarrow{OA}$方向上单位向量

$$\overrightarrow{OA}^{\circ}=\frac{1}{|OA|}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}(-3,4)=\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right).$$

于是

$$\overrightarrow{OB}=-3\,\overrightarrow{OA}^{\circ}=-3\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{9}{5},-\frac{12}{5}\right).$$

例 5　设 e_1，e_2 是相互垂直的单位向量，e_1 绕起点沿逆时针方向旋转 90° 到 e_2. 设向量 v 的模 $|v|=r$，e_1 绕原点旋转到 v 的方向所成的角为 α. 求 v 在基 e_1，e_2 下的坐标.

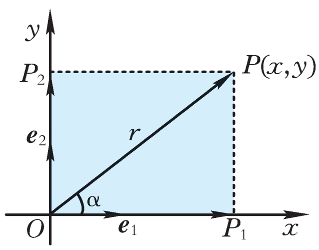


图 4-25

解　如图 4-25，在平面上建立直角坐标系，O 是原点，e_1，e_2 的方向分别为 x 轴，y 轴正方向，e_1，e_2 的模为单位长. 设 Ox 是 x 轴的非负半轴.

设 $v=\overrightarrow{OP}$，则 v 的坐标也就是点 P 的坐标 $(x,\ y)$. $|OP|=r$，

$\alpha=\angle xOP$.

当 $r>0$ 时，由 α 的三角函数的定义知道

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \sin\alpha=\frac{y}{r}.$$

从而

$$x=r\cos\alpha,\quad y=r\sin\alpha.$$

$\boldsymbol{v}=\overrightarrow{OP}$的坐标为 $(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$. 这一结论当 $r=0$ 时显然也成立.

试用例 5 的结论重新处理例 1.

在本节定理 3 中，我们证明了：任意取定两个相互垂直的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，可以将平面上的任意向量 $\boldsymbol{v}$ 写成 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的线性组合 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$. 但仔细考察定理 3 的证明过程，你会发现：

并不需要要求 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是互相垂直的单位向量，只要它们是不平行的非零向量，整个证明仍然有效，一个字都不需要改就可得出如下定理：

定理 4（平面向量基本定理） 设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是平面上两个不平行的非零向量，则

（1）平面上任意一个向量 $\boldsymbol{v}$ 可以分解为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的线性组合：$\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$.

（2）向量 $\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$ 相等$\Leftrightarrow$线性组合式中的对应系数相等：$a=x$ 且 $b=y$.

练习

1. 已知 $A(1, 4)$，$B(2, 5)$，$C(-2, 1)$. 求证：A，B，C 三点共线.
2. 已知 $A(1,0)$，$B(0,2)$，$C(-1,-2)$，求▱$ABCD$ 的第四个顶点 D 的坐标.
3. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(x,1)$，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{u}/\!/\boldsymbol{v}$. 求 x.
4. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,3)$，$\boldsymbol{c}=(7,-11)$，且 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}-y\boldsymbol{b}$. 求实数 x，y 的值.

习题 4

学而时习之

1. 已知▱$ABCD$ 的顶点 $A(-1, 2)$, $B(2, 1)$, $C(4, 3)$.

   (1) 求第四个顶点 D 的坐标;

   (2) 求对角线 AC, BD 交点的坐标.

2. 若 $A(1,1)$, $B(2,-4)$, $C(x,-9)$ 三点共线，求 x 的值.

3. 在△ABC 中，$A(7,8)$, $B(3,5)$, $C(4,3)$, D 是 BC 的中点，求$\overrightarrow{DA}$.

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,-2)$, $\boldsymbol{b}=(-2,1)$, $\boldsymbol{c}=(7,-4)$, 若 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$, 求实数 λ, μ 的值.

温故而知新

5. 已知△ABC, G 是平面上的点. 按平面向量基本定理，将$\overrightarrow{AG}$写成$\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$的形式，当 x, y 满足什么条件时，G 为边 BC 的中点?

6. 已知平行四边形的 3 个顶点分别是$(4,2)$, $(5,7)$, $(-3,4)$, 则第 4 个顶点的坐标不可能为 (　　)

   (A) $(12, 5)$　　(B) $(-2, 9)$

   (C) $(-4, -1)$　　(D) $(3, 7)$

4.5　向量的数量积

我们已经学习了向量的加减法以及实数与向量的乘法. 但是，为了处理向量的长度和角度，还需要一种新的运算：两个向量的数量积.

4.5.1　向量的数量积

例　一辆小车在拉力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿水平方向前进了 s km. 拉力 $\boldsymbol{F}$ 的大小为 F N，方向与小车前进的方向成 α 角，如图 4-26. 求 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W.

解　小车的位移 $\boldsymbol{s}$ 是一个向量，方向是水平方向向前（图中向右），大小 $|\boldsymbol{s}|=s$.

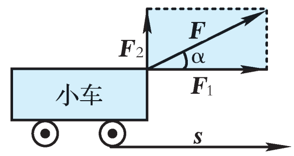


图 4-26

拉力 $\boldsymbol{F}$ 可以分解为与 $\boldsymbol{s}$ 平行（水平方向）的分力 $\boldsymbol{F}_1$ 和与 $\boldsymbol{s}$ 垂直（竖直方向）的分力 $\boldsymbol{F}_2$ 之和：$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$. $\boldsymbol{F}_1$ 称为 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{s}$ 方向上的**投影**（projection）.

由力学知识知道：只有与 $\boldsymbol{s}$ 平行的分力 $\boldsymbol{F}_1$ 对小车做功，与 $\boldsymbol{s}$ 垂直的分力 $\boldsymbol{F}_2$ 不做功. $\boldsymbol{F}_1$ 做的功就是 $\boldsymbol{F}$ 做的功 W.

记沿 $\boldsymbol{s}$ 方向 1 N 的力为 $\boldsymbol{N}_1$，则 $\boldsymbol{F}_1=x\boldsymbol{N}_1$. 系数 x 就是用 $\boldsymbol{N}_1$ 去度量 $\boldsymbol{F}_1$ 所得到的数值，称为 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{s}$ 方向上的**投影值**（projection value），记作 $(\boldsymbol{F})_s$. $|x|=|\boldsymbol{F}_1|$ 表示 $\boldsymbol{F}_1$ 的大小，称为 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{s}$ 方向上的**投影长**. x 的符号表示 $\boldsymbol{F}_1$ 的方向与 $\boldsymbol{s}$ 相同（当 $x>0$）还是相反（当 $x<0$）. $\boldsymbol{F}_1$ 所做的功就等于 x 与 s 的乘积，也就是 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{s}$ 方向上的投影值与 $\boldsymbol{s}$ 的大小的乘积：

$$W=(\boldsymbol{F})_s|\boldsymbol{s}|.$$

当 α 为锐角时，$\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{s}$ 方向相同，从而与 $\boldsymbol{N}_1$ 方向相同，$x=|\boldsymbol{F}_1|=F\cos\alpha$；当 α 为钝角时，$\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{s}$ 方向相反，$x=-|\boldsymbol{F}_1|=F\cos\alpha$；当 α 为直角时，$\boldsymbol{F}_1=0$，$x=|\boldsymbol{F}_1|=0=F\cos\alpha$. 总之，在所有情况下都有

$$x=(\boldsymbol{F})_s=|\boldsymbol{F}|\cos\alpha.$$

从而 $W=(|\boldsymbol{F}|\cos\alpha)s$，即

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\alpha.$$

实际上，如果再取竖直向上 1 N 的力为 $\boldsymbol{N}_2$，则 $x=(\boldsymbol{F})_s$ 就是 $\boldsymbol{F}$ 在基 $\boldsymbol{N}_1$，$\boldsymbol{N}_2$ 下的第一坐标. 在本章第 4.4 节中已经知道 $\boldsymbol{F}$ 的坐标为

$(|\boldsymbol{F}|\cos\alpha,\ |\boldsymbol{F}|\sin\alpha)$，其第一坐标 $x=|\boldsymbol{F}|\cos\alpha$.

以上是将力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 按法则 $|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\alpha$ 相乘得到了所做的功. 这种法则可以推广到一般的向量.

定义　设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是任意两个向量，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 是它们的夹角，取值范围是 $[0,\pi]$，则定义

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$$

称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**（scalar product）.

按照这个定义，例题中求的功 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$ 等于力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积.

注意　1. 两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的**数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是实数而不是向量**，这正是它称为数量积的原因.

2. 数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 也称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积.

3. 数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 一定要在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间用一点“·”来表示，因此也称为“点积”或“点乘”. 不能将 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 写成 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{ab}$.

4. 从任一点 O 出发作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则射线 OA，OB 所夹的最小非负角就是向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，取值在 $[0,\pi]$ 的范围内.

5. 当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 之中有一个为零时，它们的夹角 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 没有确定的值，但此时 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 仍有确定的值 0.

如图 4-27，设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是任意向量，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$. 取 $\boldsymbol{b}$ 方向上的单位向量 $\boldsymbol{b}^{\circ}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}$，将 $\boldsymbol{a}$ 分解为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$，使 $\boldsymbol{a}_1/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}_2\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}_1=x\boldsymbol{b}^{\circ}$，其中 $x=|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$. $\boldsymbol{a}_1$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影. x 称为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$

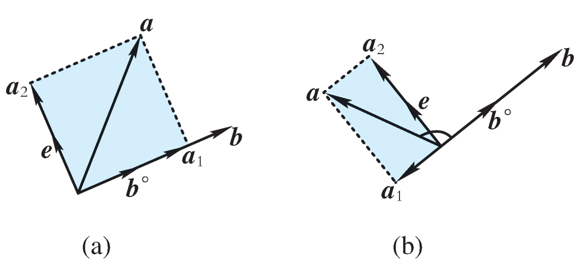


图 4-27

方向上的投影值，记作$(\boldsymbol{a})_b$. 取与$\boldsymbol{b}^\circ$垂直的单位向量$\boldsymbol{e}$，则$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$方向上的投影值$(\boldsymbol{a})_b$就是$\boldsymbol{a}$在基$\boldsymbol{b}^\circ$，$\boldsymbol{e}$下的坐标(x, y)的第一分量x.

将**$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影值**

$$(\boldsymbol{a})_b=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$$

与数量积

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$$

相比较，可知：

$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影值

$$(\boldsymbol{a})_b=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^\circ=\boldsymbol{a}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}.$$

特别地，当$\boldsymbol{b}$是单位向量（即$|\boldsymbol{b}|=1$）时，有

$$(\boldsymbol{a})_b=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}.$$

因此，归根结底，投影值可以用数量积运算得出.

定理 5　数量积满足如下的运算律：

(1) **交换律**：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$，对任意向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$成立；

(2) **与数乘的结合律**：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，对任意向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$和实数$\lambda$成立；

(3) **分配律**（distributive law）：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}')\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}$，对任意向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}'$，$\boldsymbol{b}$成立.

> 这些运算律都是你在进行数的运算时所熟悉的，是进行代数式的展开和合并同类项的理论根据. 如果没有兴趣，你可以不看这个定理的证明，只管使用这些运算律，按你熟悉的方式进行向量的“展开和合并”.
>
> 但应当认识到，向量运算与数的运算是不同的，这些运算律对于向量运算是否成立，不是理所当然的，需要加以证明. 虽然你可以不掌握这个证明，但应当感谢别人已为你证明过了.

证明　(1) 由定义知道

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \text{ 与 } \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$$

相等.

如果$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，(2),(3)中所需证明的等式两边都等于0,显然相等.

设$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，$b=|\boldsymbol{b}|>0$. 取$\boldsymbol{b}$方向上的单位向量$\boldsymbol{b}^\circ=\frac{1}{b}\boldsymbol{b}$，取与$\boldsymbol{b}^\circ$垂直的单位向量$\boldsymbol{e}$. 以$\boldsymbol{b}^\circ$，$\boldsymbol{e}$组成基将所有向量用坐标来表示，则$\boldsymbol{b}=(b, 0)$. 任一向量$\boldsymbol{v}=(x, y)$在$\boldsymbol{b}$方向上的投影值$(\boldsymbol{v})_b=x$，因而$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{v})_b|\boldsymbol{b}|=xb$，即

$$(x,y)\cdot(b,0)=xb. \qquad ①$$

设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}'$在基$\boldsymbol{b}^\circ$，$\boldsymbol{e}$下的坐标分别为(x,y),(x',y'). 由①，得

(2) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=(\lambda(x,y))\cdot(b,0)=(\lambda x,\lambda y)\cdot(b,0)=(\lambda x)b$，与

$$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\lambda((x,y)\cdot(b,0))=\lambda(xb)\quad 相等.$$

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}')\cdot\boldsymbol{b}=((x,y)+(x',y'))\cdot(b,0)$

$=(x+x',y+y')\cdot(b,0)=(x+x')b$，与

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}=(x,y)\cdot(b,0)+(x',y')\cdot(b,0)$

$=xb+x'b$　相等.

练　习

1. 已知 $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=4$，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 满足下列条件时，分别求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$：

   (1) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；(3) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$；(4) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$.

2. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=5$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=12$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 的方向上的投影.

4.5.2　利用数量积计算长度和角度

1.　长度公式：

数量积的一个重要的特殊情形是，向量 $\boldsymbol{a}$ 与自己的数量积：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle=|\boldsymbol{a}|^2\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2,$$

也就是说**向量与自己的数量积等于这个向量的模的平方.**

由此得到利用数量积计算向量的模(即长度)的公式：

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}\qquad(长度公式)$$

记 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$，长度公式成为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}.$$

想一想：$\sqrt{\boldsymbol{a}^2}=\boldsymbol{a}$ 对不对，为什么？

由 $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$ 能不能推广到 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$？

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ 什么时候正确？

2.　夹角余弦公式：

对于任意两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，由数量积的定义

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle,$$

可得

$$\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2}\cdot\sqrt{\boldsymbol{b}^2}} \qquad \text{（夹角余弦公式）}$$

利用这个公式，经过数量积运算可以算出两个向量夹角的余弦，从而算出这个夹角.

3. 垂直条件：

夹角余弦公式的一个重要的特殊情形是：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}.$$

我们规定零向量与所有的向量都垂直. 这样，对任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$（不论它们是否为零），都有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \qquad \text{（垂直条件）}$$

由此可知，要判定两个向量是否垂直，只要看它们的数量积是否为 0.

注意　两个非零数的乘积一定不为零. 但两个非零向量的数量积却可能等于零，只要它们相互垂直. 这是数的运算与向量运算的一个巨大差别，需要特别加以注意.

这没有什么奇怪的：两个向量的数量积不是两个数的乘积而是三个数的乘积，即使两个向量都不为零，也只能说明这三个数中有两个数（两个向量的模）不为零，第三个数（夹角的余弦）还可能等于零.

以力做功为例：即使力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 都不为零，只要力与位移垂直，做的功仍然等于零.

对任意两个数 a，b，我们有乘法公式：

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；

(2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$；

(3) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

对任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，类似的等式

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$；

(2) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$

是否仍然成立呢？

要看这些公式对向量是否成立，先看数的相应公式为什么成立. 比如：

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a(a+b)+b(a+b) \quad \text{（加乘分配律）}\end{aligned}$$

$=(aa+ab)+(ba+bb)$　（加乘分配律）

$=aa+(ab+ab)+bb$　（乘法交换律，加法结合律）

$=a^2+2ab+b^2$.

将上面的式子中的数 a，b 换成向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，将乘法换成点乘，由向量的运算律知道每一步运算过程仍然成立，就可知向量等式

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$$

成立.

同样地，可验证其余两个等式也成立.

我们来看看这些公式有什么几何意义.

例　设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不平行，试解释向量等式 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$ 的几何意义.

解　任取一点 C 出发作 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$，连接 AB，则 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

我们有

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\overrightarrow{BA}^2=|BA|^2,$$

$$\boldsymbol{a}^2=|CA|^2,$$

$$\boldsymbol{b}^2=|CB|^2,$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|CA||CB|\cos C.$$

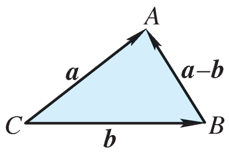


图 4-28

因此，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$ 就是

$$|BA|^2=|CA|^2+|CB|^2-2|CA||CB|\cos C.$$

这个等式反映了 $\triangle ACB$ 中三边长 $|CA|$，$|CB|$，$|BA|$ 及内角 C 的余弦的关系，称为三角形的**余弦定理**（law of cosines）.

容易看出，利用这个定理，已知两边 CA，CB 的长度及夹角 C 的大小，可以求出第三边 AB 的长度

$$|AB|=\sqrt{|CA|^2+|CB|^2-2|CA||CB|\cos C}.$$

已知三边长可以求出任意一个内角的余弦，从而求出这个内角

$$\cos C=\frac{|CA|^2+|CB|^2-|AB|^2}{2|CA||CB|}.$$

如果 $\angle C$ 是直角，$\triangle ACB$ 是直角三角形，$\cos C=0$，余弦定理就变成

$$|BA|^2=|CA|^2+|CB|^2.$$

“展开合并等闲算，勾股余弦未足奇.”一不小心就由如此简单的乘法公式得出了如此重要的勾股定理和余弦定理，向量的运算真神奇！

自己试一试：对向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不平行且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 的情况，解释 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$ 的几何意义.

这就是关于直角三角形的**勾股定理**（pythagoras theorem）. 可见，勾股定理是余弦定理的特殊情形，余弦定理是勾股定理的推广.

关于如何应用余弦定理来解三角形，在解三角形一章中将专门学习.

练　习

1. 已知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，且 $(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，求 λ.
2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=4$，且 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8$. 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.
3. 已知四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，且 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$. 试判断四边形 $ABCD$ 的形状.

4.5.3　利用坐标计算数量积

例 1　设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是相互垂直的单位向量，向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 下的坐标分别是 (x_1, y_1)，(x_2, y_2). 求：

(1) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$；

(2) $|\boldsymbol{u}|$，$|\boldsymbol{v}|$；

(3) 当 $\boldsymbol{v}\neq 0$ 时，求 $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 上的投影值 $(\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{v}}$；

(4) 当 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 都不为零时，求 $\cos\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$；

(5) 坐标满足什么条件时，$\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$？

解　(1) $\boldsymbol{u}=x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{v}=x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}&=(x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2)\cdot(x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2)\\&=x_1x_2\boldsymbol{e}_1^2+x_1y_2(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)+y_1x_2(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1)+y_1y_2\boldsymbol{e}_2^2.\end{aligned}\qquad ①$$

由于 $\boldsymbol{e}_1\perp\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1=0$.

又由于 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是单位向量，$|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$，$\boldsymbol{e}_1^2=\boldsymbol{e}_2^2=1$.

代入①中，即得**由坐标计算数量积的公式**

$$u \cdot v=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2$$

（2）用坐标计算数量积的公式来算 $u \cdot u$，立即得

$$|u|^2=x_1x_1+y_1y_1=x_1^2+y_1^2.$$

由此得**由坐标计算向量的模的公式**

$$|u|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

同理有 $|v|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$.

（3）**由坐标计算投影值的公式**

$$(u)_v=\frac{u \cdot v}{|v|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

（4）**由坐标计算夹角余弦的公式**

$$\cos\langle u,v\rangle=\frac{u \cdot v}{|u||v|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}}$$

（5）**由坐标表示的垂直条件**

$$u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v=0 \Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$$

例 2　在平面上建立直角坐标系，O 是原点．已知点 A（16，12），B（－5，15）．

（1）求 $|OA|$，$|AB|$；

（2）求 $\angle OAB$.

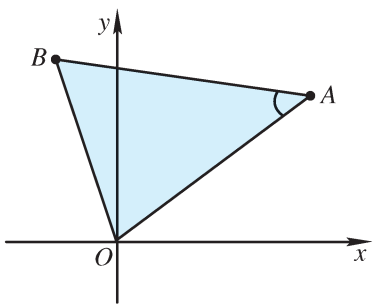


图 4-29

解　（1）由 $\overrightarrow{OA}=(16,12)$，$\overrightarrow{AB}=(-5-16,15-12)=(-21,3)$，得

$$|OA|=\sqrt{16^2+12^2}=20,$$

$$|AB|=\sqrt{(-21)^2+3^2}=15\sqrt{2}.$$

（2）$\cos\angle OAB=\cos\langle\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{|AO||AB|}$.

在这里，我们通过 A，B 的坐标算出了距离 $|AB|$．你能否推出由任意两点的坐标 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 计算这两点距离的公式？

其中 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=-(16,12)\cdot(-21,3)$

$$=-[16\times(-21)+12\times3]=300.$$

故 $\cos\angle OAB=\dfrac{300}{20\times15\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\angle OAB=45°$.

练习

1. 已知 $\boldsymbol{a}=(-2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(2,4)$，求：

   (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$；　(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

   (3) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值.

2. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,2)$，求当 k 为何值时：

   (1) $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 垂直？　(2) $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 平行？

习题 5

学而时习之

1. 求证：对任意向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，有 $-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\leqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，并判断等号什么时候成立.

2. 利用运算律验证：

   (1) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$；　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$.

3. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=33$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

4. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$，求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

5. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,0)$，$\boldsymbol{b}=(k,5)$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{3}{4}\pi$，求 k 的值.

6. 求向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$ 在向量 $\boldsymbol{b}=(2,-2)$ 方向上的投影.

温故而知新

7. 设 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 是夹角为 60°的单位向量，若 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.
8. 已知四边形 $ABCD$ 的四个顶点的坐标分别为 $A(2,1)$，$B(5,4)$，$C(2,7)$，$D(-1,4)$，试确定四边形 $ABCD$ 的形状.
9. 以原点和点 $A(3,1)$为顶点作等腰直角三角形 OAB，$\angle B=90°$，求点 B 的坐标以及$\overrightarrow{AB}$的坐标.
10. 在$\triangle ABC$ 中，已知$\overrightarrow{AB}=(2,3)$，$\overrightarrow{AC}=(1,k)$，且$\triangle ABC$ 的一个内角为直角，求实数 k 的值.
11. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,-2)$，$\boldsymbol{c}=(2,1)$，求$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$，从中你发现了什么?

4.6 向量的应用

例 1　设 $ABCD$ 是四边形，则

$$AC\perp DB \Leftrightarrow AB^2+CD^2=BC^2+DA^2.$$

证明　以 A 为原点，从 A 出发的向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$确定了点 B，C，D 的位置，从而确定了整个图形. 因此，我们将涉及的所有的向量用这三个基本的向量表示出来：

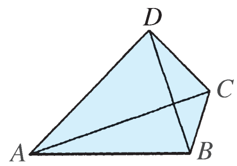


图 4-30

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}.$$

注意到 $AB^2+CD^2=BC^2+DA^2$，即 $|AB|^2+|CD|^2-|BC|^2-|DA|^2=0$. 我们先计算下面的式子：

$$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2-\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{DA}^2$$
$$=\overrightarrow{AB}^2+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})^2-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2-\overrightarrow{AD}^2$$
$$=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AC}^2-2\,\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}-$$

本题如果用几何方法证明，没有固定的方法可循，需要像等待“神仙下凡”那样突然想出一个巧妙的思路. 而用向量计算来证明，像“愚公移山”那样按部就班地算下去就得到了结果. 其中的关键是要会将几何性质翻译为向量算式来算.

$$\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}^2$$
$$=2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$=2\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$$
$$=2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}.$$

又 $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2-\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{DA}^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2-|\overrightarrow{DA}|^2$
$$=|AB|^2+|CD|^2-|BC|^2-|DA|^2$$
$$=AB^2+CD^2-BC^2-DA^2$$

因此，$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=0$
$$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2-\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{DA}^2=0$$
$$\Leftrightarrow AB^2+CD^2=BC^2+DA^2.$$

不要以为向量离了坐标就活不成，一见到向量就赶快写成坐标. 这里的例 1 与例 2 都没有用坐标，向量活得很潇洒，干得很漂亮. 如果硬要用坐标，你试试看能否从繁琐的运算中突出重围.

例 2　三个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$ 的大小相等，并且它们的合力为 0. 求这三个力两两的夹角.

解　$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=0$，从平面上任意一点 A 开始，分别作有向线段$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{F}_1$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{F}_2$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{F}_3$. 则

$$0=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD},$$

因此 D 与 A 重合，$\boldsymbol{F}_3=\overrightarrow{CA}$. 三个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$ 恰好就是△ABC 的三条边$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$.

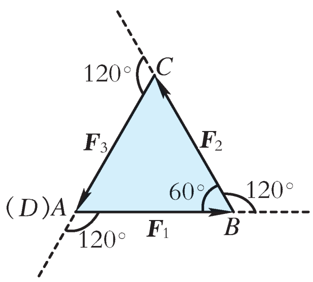


图 4-31

例 1 是用向量的代数运算解决几何问题，例 2 则是用几何性质（等边三角形的性质）解决问题. 不拘泥代数、几何，谁更方便就用谁.

由于三个力的大小相等，△ABC 的三边的长度相等，是等边三角形，三个内角都是 60°. 三个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$ 两两的夹角，也就是$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$两两的夹角，就是等边三角形 ABC 的三个外角，都等于 120°.

例 3　如图 4-32，质量为 m 的物体静止地放在斜面上，斜面与水平面的夹角为 α. 求斜面对于物体的摩擦力 F 的大小.

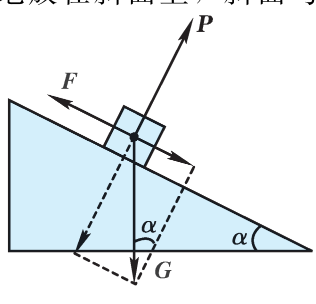


图 4-32

这里用了坐标，但所取的基向量不是水平和竖直方向，而是沿着斜面的方向和与之垂直的方向. 因此，用不用坐标，怎样用坐标，应当视具体问题而定，不要千篇一律.

解　物体受三个力：重力 $\boldsymbol{G}$(方向竖直向下，大小为 mg N)，斜面对物体的支持力 $\boldsymbol{P}$(方向垂直于斜面向上，设其大小为 P N)，摩擦力 $\boldsymbol{F}$(沿斜面上升的方向，大小为

F N). 由于物体静止，这三个力平衡，合力为 0：

$$\boldsymbol{G}+\boldsymbol{P}+\boldsymbol{F}=0. \qquad ①$$

记垂直于斜面斜向下方、大小为1 N的力为 $\boldsymbol{e}_1$，沿着斜面下降方向、大小为 1 N 的力为 $\boldsymbol{e}_2$. 以 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 为基写出所涉及的三个力的坐标，则 $\boldsymbol{P}=(-P,0)$，$\boldsymbol{F}=(0,-F)$.

由 $\boldsymbol{e}_1$ 旋转到 $\boldsymbol{G}$ 方向的角为 α，故 $\boldsymbol{G}$ 的坐标为 $(mg\cos\alpha, mg\sin\alpha)$.

由①，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}+\boldsymbol{P}+\boldsymbol{F}&=(mg\cos\alpha, mg\sin\alpha)+(-P,0)+(0,-F)\\&=(mg\cos\alpha-P, mg\sin\alpha-F)=(0,0).\end{aligned}$$

故　$mg\sin\alpha-F=0$，$F=mg\sin\alpha$(N).

本题解答的物理意义是：将物体所受的每个力都分解为与斜面平行和垂直这两个方向的分力. 平行于斜面向上的力 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{G}$ 的分力(下滑力)$\boldsymbol{G}_2$ 互相抵消，$|\boldsymbol{G}_2|=mg\sin\alpha$(N)，因此 $|\boldsymbol{F}|=mg\sin\alpha$ (N).

练　习

1. 求证：对角线相等的平行四边形是矩形.
2. 设在力 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F}_1$ 的作用下，物体运动了同样的位移 $\boldsymbol{s}\neq0$，并且做的功也相等，即 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{s}$. 能否由此断定 $\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{F}$? 如果不能，请问由 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{s}$ 你能得出什么结论？
3. 行人在铁路旁站立不动时，看到雨滴是垂直下落的. 请问同时同地，一乘客在快速行驶的火车上看到的雨滴还是垂直下落的吗？请说明乘客看到的结果和形成的原因.

习题 6

学而时习之

1. 求证：圆的直径所对的圆周角是直角.

2. 一条向正东方向流淌的河，河水流速为 3 m/s，若一条小渔船以 $3\sqrt{3}$ m/s 的速度向正北方向航行，求该船的实际航速和航向.

3. 滑雪运动员受绳索 l 牵引上山，山坡倾斜度为 30°，运动员体重为 72 kg，求绳索所受力 $\boldsymbol{F}$ 的大小.

温故而知新

4. 在四边形 $ABCD$ 中，若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}$，试证明四边形 $ABCD$ 是矩形.（提示：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\mathbf{0}$）

5. 如图 4-33，A 是⊙O 内固定的一点．从 A 任意作两条相互垂直的射线，分别交⊙O 于 B，C．作矩形 $ABPC$．求证：所作出的所有的点 P 都在以 O 为圆心的同一个圆周上.

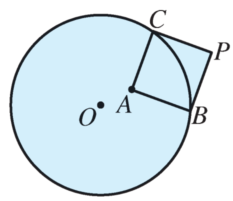


图 4-33

$$=\left(\frac{k(x+a)}{[(x+a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}},\frac{ky}{[(x+a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}\right).$$

吸引力 $\boldsymbol{F}_B$ 与$\overrightarrow{PB}=(a-x,-y)$的方向相同.取$\overrightarrow{PB}$方向上的单位向量$\overrightarrow{PB}^{\circ}=\dfrac{\overrightarrow{PB}}{|PB|}$,则

$$\boldsymbol{F}_B=\frac{k}{|PB|^2}\ \frac{\overrightarrow{PB}}{|PB|}=\frac{k}{|PB|^3}\overrightarrow{PB}$$

$$=\frac{k(a-x,-y)}{[(x-a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\left(\frac{k(x-a)}{[(x-a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}},\frac{ky}{[(x-a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}\right).$$

于是

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_A+\boldsymbol{F}_B$$

$$=\left(\frac{k(x+a)}{[(x+a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{k(x-a)}{[(x-a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}},\right.$$
$$\left.\frac{ky}{[(x+a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{ky}{[(x-a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}\right).$$

电力线图的画法

利用计算机,按如下步骤画出电力线图:

选定一个很小的长度 d,作为每一步前进的距离,称为“步长”.

选择一个常数 k,使点 P 的单位电荷受到 A,B 两点电荷的静电力(排斥或吸引)分别等于$\dfrac{k}{|PA|^2}$,$\dfrac{k}{|PB|^2}$.

从 A 点出发选定不同的出发方向,沿每个方向出发画一条电力线.出发方向用它与 x 轴正方向所成的角 α 表示.

比如,选 $\alpha=0,\dfrac{\pi}{12},\dfrac{2\pi}{12},\cdots$,这可以通过以下步骤实现:

1. 从 $\alpha=0$ 开始,连接 AB 作线段,作为第一条电力线.

2. 从 $\alpha=\dfrac{\pi}{12}$开始,每作完一条电力线,再让 α 增加$\dfrac{\pi}{12}$,一直增加到 $\alpha=\dfrac{11\pi}{12}$为止.对每个 α 进行如下步骤:

(1) 从 A 出发沿着 α 方向上的单位向量$(\cos\alpha,\sin\alpha)$的方向前进 d,到达 P_1.为此,先计算 P_1 的坐标

$$(x_1, y_1)=(-a, 0)+d(\cos\alpha, \sin\alpha)=(-\alpha+d\cos\alpha, d\sin\alpha),$$

再从 A 到 P_1 作线段.

(2) 从 $i=1$ 开始，利用循环语句按如下步骤作线段 P_iP_{i+1}：

①按照前述方法，根据 P_i 点的坐标 (x_i, y_i) 计算出 P_i 点的电场强度 $\boldsymbol{E}_i$ 的坐标；

②计算出 $\boldsymbol{E}_i$ 方向上的单位向量 $\boldsymbol{E}_i^{\circ}=\dfrac{\boldsymbol{E}_i}{|\boldsymbol{E}_i|}$ 的坐标 (u_i, v_i)；

③为了从 P_i 点出发沿 (u_i, v_i) 的方向前进 d 到达 P_{i+1} 点，按如下公式计算 P_{i+1} 的坐标

$$(x_{i+1}, y_{i+1})=(x_i, y_i)+d(u_i, v_i)=(x_i+du_i, y_i+dv_i);$$

④从 $P_i(x_i, y_i)$ 到 $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ 作线段；

⑤如果 P_{i+1} 与 B 点的距离小于 d，即 $(x_{i+1}-a)^2+y_{i+1}^2<d^2$，作线段 $P_{i+1}B$ 结束这条电力线.

否则，用 $i+1$ 代替 i，重复过程①～④，将电力线再延伸一步.

二、在平面上不同的两点 A，B 都放置电荷量相等的正电荷，作这两个电荷产生的电场的电力线图.

所有的步骤都与前面相同. 只有 (2) 的步骤①的算法需要修改.

上面两种情况下画图的结果如图 4-35.

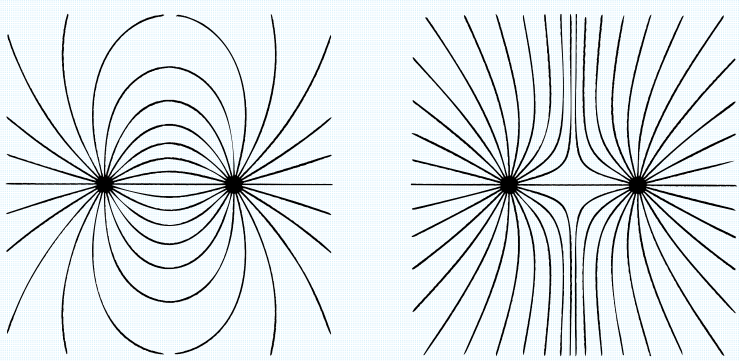


图 4-35　点电荷组的电力线

小结与复习

一、指导思想

向量是刻画几何图形及其变换的重要数学模型，是处理几何、物理以及其他领域内问题的一个有力工具.

向量刻画了几何图形的最基本要素——点的相对位置. 向量的运算及运算律代表了一些最基本的几何性质.

用向量解决几何问题的基本方法是：

将几何问题用向量语言描述，利用向量的运算来解决它，再将得到的结论翻译成问题的答案.

二、内容提要

1. 向量及其相关概念：

（1）既有大小又有方向的量称为向量，也称为矢量；

（2）向量的大小也称为这个向量的模；

（3）如果两个向量的大小相等、方向相同，则称这两个向量相等.

2. 向量的运算：

（1）加法与减法.

1° 几何法则：三角形法则、平行四边形法则；

2° 坐标法则：$(x_1, y_1)\pm(x_2, y_2)=(x_1\pm x_2, y_1\pm y_2)$；

3° 加法交换律与结合律：

(i) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(ii) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

（2）向量与实数相乘.

1° $(x+y)\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{a}$，$x(y\boldsymbol{a})=(xy)\boldsymbol{a}$，$x, y\in\mathbf{R}$；

2° $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，$\lambda\in\mathbf{R}$.

(3) 向量的数量积.

1° $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$；

2° $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2$.

3. 平面向量基本定理：设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是平面上两个不平行的非零向量，则

(1) 平面上任意一个向量 $\boldsymbol{v}$ 可以分解为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 的线性组合：

$$\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2;$$

(2) $a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2\Leftrightarrow a=x$ 且 $b=y$.

4. 两个向量的平行与垂直的条件：

(1)平行：$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，　$\lambda\in\mathbf{R}$.

当 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$时，

$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

(2) 垂直：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

当 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$时，

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

三、学习要求和需要注意的问题

1. 学习要求：

(1) 了解向量的实际背景，理解平面向量和向量相等的含义以及向量的几何表示.

(2) 掌握向量加、减法的运算，并理解其几何意义.

(3) 掌握向量数乘的运算，并理解其几何意义以及两个向量平行的含义.

(4) 了解向量的线性运算性质及其几何意义.

(5) 了解平面向量的基本定理及其意义，掌握平面向量的正交分解及其坐标表示. 会用坐标表示平面向量的加、减与数乘运算，理解用坐标表示的平面向量平行的条件.

(6) 理解平面向量数量积的含义及其物理意义，体会平面向量的数量积与向量投影的关系，掌握数量积的坐标表达式. 会进行平

面向量数量积的运算，能运用数量积表示两个向量的夹角．会用数量积判断两个平面向量的垂直关系．

（7）体会向量是一种处理几何、物理学问题的工具，提高解决实际问题的能力．

2．需要注意的问题：

（1）向量是近代数学最重要和最具体的概念之一，是沟通几何、代数、三角等内容的桥梁，具有丰富的实际背景和广泛的应用．

（2）当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 两两不平行时，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$．当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$时，不一定有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$．但当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$ 时，一定有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$．

四、参考例题

例 1　已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足：$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 垂直，且 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 垂直，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 的大小．

解　由已知，可得 $\begin{cases}(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0,\\(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0,\end{cases}$

∴ $\begin{cases}7\boldsymbol{a}^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15\boldsymbol{b}^2=0, & ①\\7\boldsymbol{a}^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8\boldsymbol{b}^2=0. & ②\end{cases}$

①－②，得　$46\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-23\boldsymbol{b}^2=0$，

∴　$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^2$．　③

如果由 $2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^2$ 推出 $2\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，从而得到 $\theta=0°$，那么，这种解法是错误的．

将③代入①，得

$7\boldsymbol{a}^2+8\boldsymbol{b}^2-15\boldsymbol{b}^2=0$，

∴　$7\boldsymbol{a}^2-7\boldsymbol{b}^2=0$．

∴　$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$．　∴　$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$．

又∵　$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，$\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{b}|^2$，

∴　$2|\boldsymbol{b}|^2\cos\theta=|\boldsymbol{b}|^2$．

∴　$\cos\theta=\frac{1}{2}$．　∵　$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，　∴　$\theta=\frac{\pi}{3}$．

例 2　已知$\overrightarrow{OP}=(2,1)$，$\overrightarrow{OA}=(1,7)$，$\overrightarrow{OB}=(5,1)$，设 C 是直线 OP 上的一点（其中 O 为坐标原点）．

(1) 求使$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$取到最小值时的$\overrightarrow{OC}$；

(2) 对(1)中求出的点 C，求 $\cos\angle ACB$.

解 (1) $\because$ 点 C 是直线 OP 上一点，

$\therefore$ 可设$\overrightarrow{OC}=t\overrightarrow{OP}$.

$\therefore$ $\overrightarrow{OC}=t(2,1)=(2t,t)$.

$\therefore$ $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=(1,7)-(2t,t)=(1-2t,7-t)$,

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=(5,1)-(2t,t)=(5-2t,1-t)$.

$\therefore$ $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(1-2t)(5-2t)+(7-t)(1-t)$

$=5t^2-20t+12$

$=5(t-2)^2-8$.

当 $t=2$ 时，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$取到最小值.

此时，$\overrightarrow{OC}=(2t,t)=(4,2)$.

(2) 当$\overrightarrow{OC}=(4,2)$时，$\overrightarrow{CA}=(-3,5)$，$\overrightarrow{CB}=(1,-1)$，

$\therefore$ $|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{34}$，$|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{2}$，由(1)知$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-8$，

$\therefore$ $\cos\angle ACB=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\,|\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{-8}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{2}}=-\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.

复习题四

学而时习之

1. 如果 $\boldsymbol{a}$ 表示“向东走 3 km”，$\boldsymbol{b}$ 表示“向西走 3 km”，$\boldsymbol{c}$ 表示“向南走 3 km”，$\boldsymbol{d}$ 表示“向北走 3 km”，试说明下列向量的意义：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；　(2) $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$；　(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$；　(4) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$.

2. 试用向量方法证明，平行四边形的对角线的平方和等于各边的平方和.

3. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表

示对角线向量$\overrightarrow{BD_1}$，$\overrightarrow{B_1D}$.

4. 已知点 D 是$\triangle ABC$ 的 BC 边的靠近 B 点的三等分点，若$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{AD}$.

5. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个不平行的向量，且$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$. 若 A，B，D 三点共线，求 k 的值.

6. 四边形 $ABCD$ 是梯形，$AB /\!/ CD$ 且 $AB=2CD$，M，N 分别是 CD 和 AB 的中点，已知$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 分别表示$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{MN}$.

7. 已知向量$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$，其中 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 分别是 x 轴，y 轴正方向上的单位向量. 试确定实数 m 的值，使$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$平行.

8. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(0,-2)$. 在下列条件下分别求 k 的值：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 平行；

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 夹角为 120°.

温故而知新

9. 已知点 $A(1,2)$，$B(4,5)$，$O(0,0)$及$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$.

(1) 求 m 为何值时，P 在 x 轴上？P 在 y 轴上？P 在第二象限？

(2) 四边形 $OABP$ 能否成为平行四边形？若能，求出相应的 m 的值；若不能，说明为什么.

10. 已知在$\triangle ABO$ 的 OA，OB 边上分别取点 M，N，使 $|OM|:|OA|=1:3$，$|ON|:|OB|=1:4$. 设线段 AN 与 BM 交于点 P，且$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{OP}$.（提示：M，P，B 三点共线，A，P，N 三点共线）

11. 经过点 $M(2,-3)$的直线分别交 x 轴，y 轴于 A，B，且 $|\overrightarrow{AB}|=4|\overrightarrow{AM}|$，求 A，B 的坐标.

12. 设向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$，其中 $0<\beta-\alpha<\pi$.

(1) 求证：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 互相垂直；

(2) 若 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 大小相等，求 $\beta-\alpha$(其中 $k\in\mathbf{R}$).

13. 如图 4-36，A_1，A_2，…，A_8 是$\odot O$ 上的八个等分点，则在以 A_1，A_2，…，A_8 及圆心 O 九个点中任意两点为起点与终点的向量中，模等于半径的向量有多少个？模等于半径$\sqrt{2}$倍的向量有多少个？

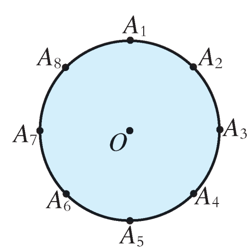


图 4-36

14. 设六边形 $P_1P_2\cdots P_6$ 是 $\odot O$ 的内接正六边形，P 是 $\odot O$ 上的任一点，试判断 $|\overrightarrow{PP_1}|^2+|\overrightarrow{PP_2}|^2+\cdots+|\overrightarrow{PP_6}|^2$ 是否为定值，并说明理由. 你能否推广？

上下而求索

匀速圆周运动

匀速圆周运动是重要的运动形式之一.

设点 P 沿着圆心为 O，半径为 R(m)的圆做匀速圆周运动，角速度为 ω，也就是说位置向量 $\overrightarrow{OP}$ 每秒转过的角为 ω 弧度. 则点 P 每秒走过的路程为 ωR(m)，也就是说 P 的运动速度的大小为 ωR(m/s).

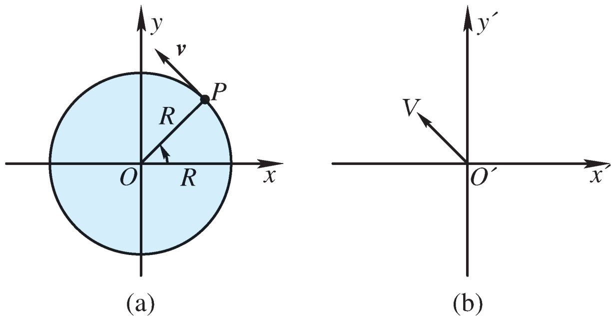


图 4-37

如图 4-37，以 O 为原点建立直角坐标系. 设 $t=0$ 时，$\angle xOP=\varphi$.

试研究点 P 在任一时刻 t 的位置、速度、加速度.

以下建议供参考：

(1) 用 $\varphi=\angle xOP$ 的值及 P 的坐标来表示 P 在时刻 t 的位置.

(2) 将点 P 在每一时刻 t 的速度向量 $\boldsymbol{v}$ 画在另一个坐标系里，用从原点 O' 出发的有向线段 $O'V$ 表示，速度向量终点 V 的运动速度就是 P 的加速度. 求出加速度的大小.

(3) 将 P 的运动分解为 x 轴方向和 y 轴方向两个分运动的合成. 研究这两个方向运动的速度、加速度以及它们之间的关系.

第 5 章 三角恒等变换

三角莫愁公式多，
几何妙笔画婀娜.
展开和角星空转，
加减正弦明暗波.

$$\cos(\theta+\alpha)=\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha$$
$$\sin(\theta+\alpha)=\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha$$

三角恒等变换是研究三角函数性质及其应用的一种工具.

三角恒等变换具有几何和物理的应用背景.以向量为桥梁可以将三角恒等变换的算式与直观的几何图形相互沟通和转化.

数学建模

平面上的旋转
——问题的提出

设平面上建立了直角坐标系．平面上所有的点绕原点 O 旋转了角 α，坐标系固定不动．

为了描述这个旋转，我们需要知道平面上每个点 $P(x,y)$ 旋转到了什么位置 P'．也就是：需要由点 P 的坐标（x，y）和旋转角 α，计算出点 P' 的坐标 (x',y')．

设 Ox 是 x 轴的非负半轴，$\angle xOP=\theta$，$|OP|=r$，则点 P 的坐标 $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$．

先考虑一个简单情况，即 $|OP|=1$．设 $\angle xOP=\theta$，则点 P 的坐标为 $(\cos\theta,\sin\theta)$．点 P 转动到点 P'，则 $|OP'|=|OP|=1$．又 $\angle POP'=\alpha$，从而 $\angle xOP'=\angle xOP+\angle POP'=\theta+\alpha$．点 P' 的坐标应为 $(\cos(\theta+\alpha),\sin(\theta+\alpha))$．这样，问题就归结为：

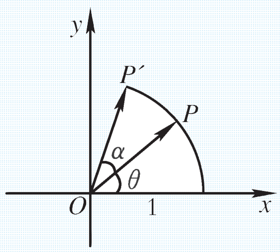


图 5-1

怎样由 θ 的三角函数 $\cos\theta$，$\sin\theta$ 以及 α 的适当的三角函数，求两角和 $\theta+\alpha$ 的三角函数 $\cos(\theta+\alpha)$ 和 $\sin(\theta+\alpha)$？

研究问题总是从简单情况入手．

对 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 的特殊情况，你能解决这个问题吗？

5.1 两角和与差的三角函数

5.1.1 两角和与差的正弦和余弦

在科学研究和实际应用中，经常需要由两个角 α，β 的三角函数值求它们的和、差角的三角函数值. 比如，在前面的数学建模中我们就看到：为了研究平面上点的旋转变换，需要由两角 α，β 的三角函数值求 $\alpha+\beta$ 的余弦和正弦.

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$分别是角 $\alpha=\angle xOA$，$\beta=\angle xOB$ 的终边上的单位向量，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的数量积

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle,$$

其中 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 表示 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角，取值范围是 $[0,\pi]$.

由 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$的坐标，可算出它们的数量积，故

$$\begin{aligned}\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle&=(\cos\alpha,\sin\alpha)\cdot(\cos\beta,\sin\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned} \qquad ①$$

当 $\alpha-\beta\in[0,\pi]$时，$\alpha-\beta$ 就是 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，代入①即得

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

对 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 从而 $\boldsymbol{a}=(0,1)$ 的特殊情形，$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=(0,1)\cdot(\cos\beta,\sin\beta)=\sin\beta$，这是一个诱导公式. 回忆以前是怎样得到这个诱导公式的？是否比这里的方法更繁一些？试一试 $\alpha=\pi$ 的情形，你能得到什么？

对任意的 α，β，总可选取适当的整数 k，使 $\alpha-\beta-2k\pi\in[-\pi,\pi)$. 记 $\beta_1=\beta+2k\pi$，则 β_1 与 β 的终边相同，且 $\alpha-\beta_1\in[-\pi,\pi)$，从而 $|\alpha-\beta_1|\leqslant\pi$，$|\alpha-\beta_1|$ 就是 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$. 因而

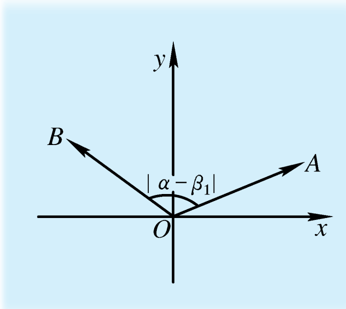


图 5-2

$$\begin{aligned}\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle&=\cos|\alpha-\beta_1|\\&=\cos(\alpha-\beta_1)\\&=\cos(\alpha-\beta-2k\pi)\\&=\cos(\alpha-\beta).\end{aligned}$$

仍可代入①，得到

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \quad ②$$

称为**差角的余弦公式**.

例 1 已知两个角 α，β 的正弦、余弦 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\sin\beta$，$\cos\beta$，求 $\alpha+\beta$ 的余弦.

解 在差角 $\alpha-\beta$ 的余弦公式中，将 β 换成 $-\beta$ 就得到和角 $\alpha+\beta$ 的余弦公式

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos[\alpha-(-\beta)]\\&=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

将上面得到的两个公式总结如下，便于应用：

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ （**和角余弦公式**）

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ （**差角余弦公式**）

我们将和角余弦公式简记为 $C_{(\alpha+\beta)}$，差角余弦公式简记为 $C_{(\alpha-\beta)}$，以便于记忆和应用.

例 2 求 75°，15°角的正弦、余弦.

分析 $75°=45°+30°$，$15°=45°-30°$. 先利用和角、差角的余弦公式求它们的余弦，再利用诱导公式 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ 求正弦.

记住 75°，15°是特殊角的和、差.

解

$$\begin{aligned}\cos 75°&=\cos(45°+30°)\\&=\cos 45°\cos 30°-\sin 45°\sin 30°\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 15°&=\cos(45°-30°)\\&=\cos 45°\cos 30°+\sin 45°\sin 30°\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

cos 15°还有其他的求法吗？

$$\sin 75°=\cos 15°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$$\sin 15°=\cos 75°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

例 2 中由 $45°\pm30°$ 的余弦求出了正弦，对 $\alpha\pm\beta$ 也可以如法炮制.

例 3 已知两个角 α，β 的正弦、余弦，求 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha-\beta$ 的正弦.

解 $\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$

$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]$

$=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$

$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$

将例 3 得到的公式总结如下：

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ **（和角正弦公式）**

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ **（差角正弦公式）**

和角正弦公式简记为 $S_{(\alpha+\beta)}$，差角正弦公式简记为 $S_{(\alpha-\beta)}$.

例 4 已知 $\sin\alpha=-\frac{1}{3}$，$\cos\beta=\frac{3}{5}$，且 α，β 都是第四象限的角. 求 $\sin(\alpha-\beta)$ 的值.

分析 要利用差角正弦公式求 $\sin(\alpha-\beta)$，需要先求出 $\cos\alpha$，$\sin\beta$.

解 由于 α，β 在第四象限，$\cos\alpha>0$，$\sin\beta<0$. 故

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5},$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{3}{5}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{8\sqrt{2}-3}{15}.$$

例 5 求下列式子的值：

（1）$\cos 20°\cos 40°-\sin 20°\sin 40°$；

（2）$\sin 5°\cos 40°+\sin 85°\sin 40°$.

解 （1）原式 $=\cos(20°+40°)=\cos 60°=\frac{1}{2}$.

也可直接将原式写为向量数量积的形式来解：

$$原式=(\cos 20^\circ,\sin 20^\circ)\cdot(\cos(-40^\circ),\sin(-40^\circ))$$

$$=\cos[20^\circ-(-40^\circ)]=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}.$$

（2）$原式=\cos 85^\circ\cos 40^\circ+\sin 85^\circ\sin 40^\circ$

$$=\cos(85^\circ-40^\circ)=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

练 习

1. 利用和（差）角公式求下列三角函数的值：

（1）$\cos 105^\circ$；　　（2）$\sin\frac{11}{12}\pi$.

2. 化简：

（1）$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$；　　（2）$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$；

（3）$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$；　　（4）$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$.

3. 已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，α 为锐角，求 $\cos\left(\frac{\pi}{4}\pm\alpha\right)$，$\sin\left(\alpha\pm\frac{\pi}{4}\right)$的值.

4. 利用和（差）角公式，求下列各式的值：

（1）$\cos 43^\circ\cos 13^\circ+\sin 43^\circ\sin 13^\circ$；　　（2）$\cos 43^\circ\cos 17^\circ-\sin 43^\circ\sin 17^\circ$；

（3）$\sin 49^\circ\cos 4^\circ-\cos 49^\circ\sin 4^\circ$；　　（4）$\sin 39^\circ\cos 21^\circ+\cos 39^\circ\sin 21^\circ$.

5.1.2 两角和与差的正切

我们已经由 α，β 的三角函数求出了 $\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ 的正弦和余弦，很容易求出 $\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ 的正切.

要使 $\tan(\alpha+\beta)$有意义，必须 $\cos(\alpha+\beta)\neq 0$. 此时

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)},$$

将和角的正弦、余弦分别代入上式，就可求出 $\alpha+\beta$ 的正切. 再将 β

换成 $-\beta$，就可得到 $\alpha-\beta$ 的正切.

让我们来试试看：

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

如果 $\cos\alpha\cos\beta\neq0$，即 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 都存在，将上面最后一步式子的分子分母同时除以 $\cos\alpha\cos\beta$，得到

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},$$

于是

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta)&=\tan[\alpha+(-\beta)]\\&=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}\\&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.\end{aligned}$$

上面得出的结果可以总结如下：

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\quad\text{（和角正切公式）}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\quad\text{（差角正切公式）}$$

和、差角正切公式分别简记为 $T_{(\alpha+\beta)}$，$T_{(\alpha-\beta)}$.

利用这两个公式可以由 α，β 的正切求出 $\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ 的正切（当然必须在 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 及所求正切都存在的情况下才能求出）.

前面所得到的求两角和 $\alpha+\beta$ 的正弦、余弦、正切的公式都称为**和角公式**，求两角差 $\alpha-\beta$ 的正弦、余弦、正切的公式则都称为**差角公式**.

例 1 求 $\tan 75°$，$\tan 15°$的值.

解 $\tan 75°=\tan(45°+30°)=\dfrac{\tan 45°+\tan 30°}{1-\tan 45°\tan 30°}$

$$=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\times\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}.$$

$$\tan 15^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\times\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}.$$

或 $\tan 15^\circ=\tan(90^\circ-75^\circ)=\cot 75^\circ$

$$=\frac{1}{\tan 75^\circ}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}.$$

例 2 已知 α，β 满足 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$，$\tan\alpha=\frac{1}{2}$. 求 $\tan\beta$ 的值.

解 由于 $\beta=\frac{\pi}{4}-\alpha$，故

$$\tan\beta=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

例 3 已知一元二次方程 $x^2+bx+c=0(c\neq 1)$ 的两根为 $\tan\alpha$，$\tan\beta$. 求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

解 由一元二次方程根与系数的关系，得

$$\tan\alpha+\tan\beta=-b,\ \tan\alpha\tan\beta=c.$$

故
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-b}{1-c}=\frac{b}{c-1}.$$

练习

1. 求 $\tan 105^\circ$ 的值.
2. 计算：

    （1）$\dfrac{\tan 55^\circ+\tan 5^\circ}{\tan 55^\circ\tan 5^\circ-1}$；　　（2）$\dfrac{\tan 55^\circ-\tan 10^\circ}{1-\tan 55^\circ\tan 170^\circ}$.

3. 化简：

    （1）$\tan\alpha+\tan\beta-\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)$；

    （2）$\tan 20^\circ+\tan 40^\circ+\sqrt{3}\tan 20^\circ\tan 40^\circ$.

习题 1

学而时习之

1. 已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\beta=-\frac{5}{13}$，且 α，β 均为第二象限角，求下列三角函数的值：

　(1) $\cos(\alpha+\beta)$；　　(2) $\cos(\alpha-\beta)$；

　(3) $\sin(\alpha+\beta)$；　　(4) $\sin(\alpha-\beta)$.

2. 利用和（差）角公式化简：

　(1) $\cos(30°+x)-\cos(30°-x)$；

　(2) $\sin(60°+y)+\sin(60°-y)$.

3. 计算：

　(1) $\cos 17°\cos 2°+\sin 17°\sin 2°$；

　(2) $\sin 67°\cos 8°+\cos 67°\sin 8°$.

4. 化简：

　(1) $\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)$；

　(2) $\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)$.

5. 已知 $\tan x=\frac{1}{4}$，$\tan y=-3$，求 $\tan(x+y)$，$\tan(x-y)$ 的值.

6. 已知 $x+y=45°$，求 $(1+\tan x)(1+\tan y)$ 的值.

温故而知新

7. 求证：

　(1) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$；

　(2) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

8. 已知 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$，$\alpha$ 为锐角，求 $\cos\alpha$，$\sin\alpha$ 的值.

9. 已知 $\tan x=\frac{3}{2}$，$\tan y=\frac{1}{5}$，且 x，y 为锐角，求 $x-y$ 的值.

10. 已知 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是方程 $x^2+6x+c=0$ 的两个根．若 $\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$，试求 c 的值．

11. 已知 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{2}{5}$，$\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$，求 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值．

12. 已知 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，且 $\alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，$\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，求 $\cos\beta$ 的值．

13. 在正弦、余弦、正切的和角公式中，令 $\alpha=\beta$，你能得到怎样的结论？

5.2 二倍角的三角函数

利用和角公式将下列式子展开：

（1）$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=$________________；

（2）$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=$________________；

（3）$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=$________________．

请自己得出答案．

由上可得到求二倍角的三角函数的公式如下，称为**倍角公式**：（习惯上“倍角”通常就约定为二倍角，如果需要求三倍角、四倍角，其中的倍数“三”、“四”都不能省略．）

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \text{（倍角正弦公式）}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha \qquad \text{（倍角余弦公式）}$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \text{（倍角正切公式）}$$

正弦、余弦、正切倍角公式分别简记为 $S_{(2\alpha)}$，$C_{(2\alpha)}$，$T_{(2\alpha)}$．

想一想，由 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ 怎样得出 $2\cos^2\alpha-1$ 及 $1-2\sin^2\alpha$？

例 1 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{5}$，求：

（1）$\tan 2\alpha$；　　（2）$\tan 4\alpha$；

（3）$\tan\beta$，其中 β 满足 $4\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$．

解 （1）$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\times\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\dfrac{5}{12}$．

（2）$\tan 4\alpha=\tan 2(2\alpha)=\dfrac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha}=\dfrac{2\times\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}=\dfrac{120}{119}$.

（3）由于 $\beta=\dfrac{\pi}{4}-4\alpha$，因此

$$\tan\beta=\tan\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan 4\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan 4\alpha}=\frac{1-\frac{120}{119}}{1+\frac{120}{119}}=-\frac{1}{239}.$$

例 2　已知 α 是锐角，且 $\cos\alpha=\dfrac{1}{9}$，求：

（1）$\sin\dfrac{\alpha}{2}$；　　（2）$\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

解　记 $\beta=\dfrac{\alpha}{2}$，则 $\alpha=2\beta$，且易知 α 与 β 都为锐角.

（1）在等式 $\cos\alpha=\cos 2\beta=1-2\sin^2\beta$ 中，将 $\cos\alpha=\dfrac{1}{9}$ 代入，得

$$1-2\sin^2\beta=\frac{1}{9}\Rightarrow 2\sin^2\beta=\frac{8}{9}\Rightarrow\sin^2\beta=\frac{4}{9}.$$

又　$\sin\beta>0$，故 $\sin\beta=\dfrac{2}{3}$，即

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{3}.$$

（2）可由 $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2}{3}$，得

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

也可由 $2\cos^2\beta-1=\cos\alpha=\dfrac{1}{9}$ 及 $\cos\beta>0$，解出

$$\cos\beta=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{9}}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{3},$$

即　$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

例 2 是由 $\cos\alpha$ 的具体值计算 $\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$. 你能用这个方法得出由 $\cos\alpha$ 计算 $\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$ 的公式吗？

例 3　试推出由 $\cos\alpha$ 计算 $\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$，$\tan\dfrac{\alpha}{2}$ 的绝对值的公式.

解 仿照例 2 的步骤进行：记 $\beta=\frac{\alpha}{2}$，则 $\alpha=2\beta$.

由 $\cos\alpha=\cos 2\beta=1-2\sin^2\beta$，推出 $\sin^2\beta=\frac{1-\cos\alpha}{2}$，即

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},\qquad \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

由 $\cos\alpha=\cos 2\beta=2\cos^2\beta-1$，推出 $\cos^2\beta=\frac{1+\cos\alpha}{2}$，即

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2},\qquad \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

由 $\tan\frac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$，得

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},\qquad \left|\tan\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

利用例 3 中推出的公式，可以由角 α 的余弦值 $\cos\alpha$ 计算出它的半角$\frac{\alpha}{2}$的正弦、余弦、正切的绝对值．再根据$\frac{\alpha}{2}$所在的象限可以确定这些函数值的符号，从而确定这些函数值．因此，例 3 中得出的公式称为**半角公式**.

半角公式不要求同学们记忆．如果需要使用，可以查教材或数学手册．

例 4 求证：$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

证明 由 $\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$，知

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2},\quad 1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

又 $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$，故

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\tan\frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\tan\frac{\alpha}{2}.$$

例 5 试推出由 $\cos\alpha$ 计算 $\cos 3\alpha$ 的公式.

解 $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha)$

$= \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha$

$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - (2\sin\alpha\cos\alpha)\sin\alpha$

$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$

$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$

因此，所求公式为

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

练习

1. 求值：

（1）$\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$；（2）$1-2\sin^2\frac{\pi}{8}$；（3）$\dfrac{\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan^2\frac{\pi}{12}}$.

2. 化简：

（1）$\cos^4 x - \sin^4 x$；（2）$\sqrt{1+\sin 2x}$ $\left(其中\ x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$.

3. 求证：

（1）$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$；（2）$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$；

（3）$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

习题 2

学而时习之

1. 求函数 $y=\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x$ 的最大值.
2. 求函数 $y=\sin^4 x - \cos^4 x$ 的最小值.
3. 已知 $\cos x = -\frac{1}{3}$，$180°<x<270°$.

（1）求 $\sin 2x$，$\cos 2x$，$\tan 2x$ 的值；

（2）求 $\sin \frac{x}{2}$，$\cos \frac{x}{2}$，$\tan \frac{x}{2}$的值.

温故而知新

4．已知等腰三角形一个底角的正弦值为$\frac{4}{5}$，求这个三角形的顶角的正弦、余弦及正切值.

5．已知等腰三角形顶角的余弦值为$\frac{4}{5}$，求这个三角形的底角的正弦、余弦及正切值.

6．求证：

（1）$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2\tan 2\alpha$；

（2）$\frac{2\cos^2 x-1}{1-2\sin^2 x}+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2$；

（3）$2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos 2\alpha$.

5.3 简单的三角恒等变换

在 5.1.1 节中，我们通过计算两个单位向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$的数量积得出了计算差角余弦 $\cos(\alpha-\beta)$的公式. 现在我们研究这两个单位向量的和，看能得出什么结果.

从坐标原点 O 出发作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为单位向量，如图 5-3. 则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\\&=(\cos\alpha+\cos\beta,\sin\alpha+\sin\beta).\end{aligned}$$

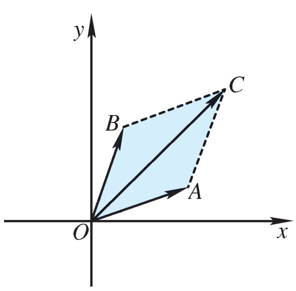


图 5-3

在图 5-3 中，四边形 $OACB$ 是菱形，OC 是 $\angle AOB$ 的角平分线，因而

$$\theta=\angle xOC=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$$r=|OC|=2|OB|\cos\angle COB=2\cos\frac{\angle AOB}{2}$$

$$=2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

于是

$$\cos\alpha+\cos\beta=r\cos\theta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=r\sin\theta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

想一想，上面的几何推理在哪些情况下成立？其他情况能不能化成这些情况？

如何将上面的几何推理严密化，请参阅例 4 解法二.

由图 5-3 中的几何图形很容易得出上面的两个公式，将三角函数的和化为乘积.

通过几何图形进行推理，优点是直观. 但所发现的公式是否对任意两个角 α，β 都成立，还需要对各种情形进行讨论. 而如果用三角恒等变形进行证明就可避免这种讨论.

例 1 利用和角、差角公式，证明公式

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

并得出将 $\cos\alpha-\cos\beta$ 化为三角函数乘积的公式.

解 将等式右边出现的角 $\frac{\alpha+\beta}{2}$，$\frac{\alpha-\beta}{2}$ 分别用字母 A，B 表示：

$$A=\frac{\alpha+\beta}{2},\qquad B=\frac{\alpha-\beta}{2},$$

则

$$A+B=\alpha,\qquad A-B=\beta.$$

于是

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta&=\cos(A+B)+\cos(A-B)\\&=\cos A\cos B-\sin A\sin B+\cos A\cos B+\sin A\sin B\\&=2\cos A\cos B=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\alpha-\cos\beta&=\cos(A+B)-\cos(A-B)\\&=\cos A\cos B-\sin A\sin B-(\cos A\cos B+\sin A\sin B)\end{aligned}$$

已经知道和角、差角公式对一切角都成立，恒等变形过程中不需进行讨论，这是它的优点. 但所要证明的结论是怎样发现出来的？你是否觉得用几何画图的方法更直观，更自然？

代数运算（包括三角恒等变换）与几何推理各有所长，各有所短. 关键在善于运用，扬长避短.

$$=-2\sin A\sin B=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

用同样的方法可以得出将 $\sin\alpha$，$\sin\beta$ 的和或差化成三角函数乘积的公式.

作为练习，请自己试一试.

我们有时需要将三角函数的和差化为乘积，也有的时候需要将乘积化为和差.

例 2 求证：$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$.

解 将公式

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

左右两边分别相减，得

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta.$$

两边同除以 2，得

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

例 3 （1）将函数 $y=\sin x+\cos x$ 化成 $y=A\sin(x+\varphi)(A>0)$ 的形式，并求使它达到最大值时的锐角 x.

（2）实数 a，b 不全为 0，求函数 $y=a\sin x+b\cos x$ 的值域.

在理论分析之前，不妨先利用计算机画出函数 $y=\sin x+\cos x$ 的图象，通过观察图象来研究这个函数的性质.

分析 先用计算机画出 $y=\sin x+\cos x$ 的图象，如图 5-4.

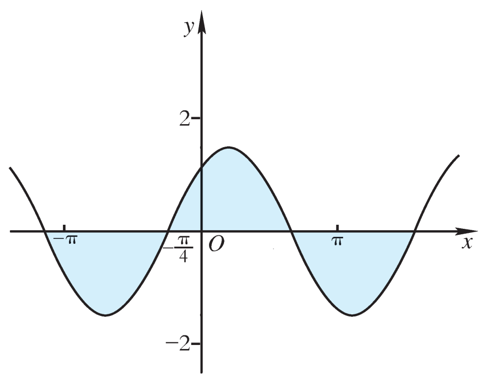


图 5-4

观察可知，函数 $y=A\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，y 达到最大值

$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}=A$.

解 (1) $A\sin(x+\varphi)=A(\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi)$

$$=(A\cos\varphi)\sin x+(A\sin\varphi)\cos x.$$

要使它等于 $\sin x+\cos x$，只需 $A\cos\varphi=1$ 且 $A\sin\varphi=1$，即 $\cos\varphi=\frac{1}{A}$，$\sin\varphi=\frac{1}{A}$.

由 $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$，知必须 $\left(\frac{1}{A}\right)^2+\left(\frac{1}{A}\right)^2=1$，$\frac{2}{A^2}=1$，$A=\sqrt{2}$.

故 $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\varphi$，取 $\varphi=\frac{\pi}{4}$可达到要求.

可见，$y=\sin x+\cos x$ 可化为 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的形式.

本题也可凭观察法直接凑得
$\sin x+\cos x$
$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$
$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)$
$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

当且仅当 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$达到最大值 1 时，$y$ 达到最大值$\sqrt{2}$.

满足此条件的锐角 x 使 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，故 $x=\frac{\pi}{4}$.

(2) 仍先设法将 $a\sin x+b\cos x$ 写成 $A\sin(x+\varphi)$的形式.

比较

$$a\sin x+b\cos x=A\sin(x+\varphi)$$
$$=(A\cos\varphi)\sin x+(A\sin\varphi)\cos x,$$

只要能选取 A，φ，使

$$\begin{cases}A\cos\varphi=a,\\A\sin\varphi=b,\end{cases}\text{即}\begin{cases}\cos\varphi=\frac{a}{A},\\\sin\varphi=\frac{b}{A}\end{cases}\text{即可.}$$

$$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1\Rightarrow\left(\frac{a}{A}\right)^2+\left(\frac{b}{A}\right)^2=1\Leftrightarrow A=\sqrt{a^2+b^2}.$$

当 $A=\sqrt{a^2+b^2}$ 时，$\overrightarrow{OP}=\left(\frac{a}{A},\frac{b}{A}\right)$是单位向量，设$\angle xOP=\varphi$，则 $\cos\varphi=\frac{a}{A}$，$\sin\varphi=\frac{b}{A}$符合要求.

可见 $a\sin x+b\cos x=A\sin(x+\varphi)$，对 $A=\sqrt{a^2+b^2}$和某个 φ 成立.

函数 $y=a\sin x+b\cos x$ 具有形式 $y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$，值域为 $[-\sqrt{a^2+b^2},\sqrt{a^2+b^2}]$.

例 4 已知 $\cos\alpha+\cos\beta\neq 0$，化简 $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$. $\Big($可以利用公式 $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$，$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. $\Big)$

解法一

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

解法二 如图 5-5，以平面直角坐标系中的 x 轴的非负半轴为角的始边，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$分别是角 α，β 的终边上的单位向量，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

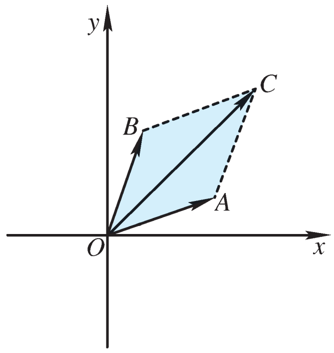


图 5-5

则 $\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，

$\overrightarrow{OB}=(\cos\beta,\sin\beta)$，

$\overrightarrow{OC}=(\cos\alpha+\cos\beta,\sin\alpha+\sin\beta)$，

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\tan\angle xOC.$$

先设$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$不共线，则四边形 $OACB$ 是菱形，$\overrightarrow{OC}$是$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$夹角的平分线. 可选择整数 k，使 $\alpha-\beta-2k\pi\in(-\pi,\pi)$. 令角 $\beta_1=\beta+2k\pi$，则角 β_1 的终边仍为$\overrightarrow{OB}$，且 $|\alpha-\beta_1|<\pi$. $|\alpha-\beta_1|$就是$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的夹角，角$\dfrac{\alpha+\beta_1}{2}$的终边就是这个夹角的角平分线$\overrightarrow{OC}$.

再设$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$共线，由于 $\cos\alpha+\cos\beta\neq 0$，$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$不可能方向相反，只可能方向相同，此时 $\beta_1=\alpha$，$\dfrac{\alpha+\beta_1}{2}=\alpha$ 的终边仍是$\overrightarrow{OC}$.

于是

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\tan\frac{\alpha+\beta_1}{2}=\tan\frac{\alpha+\beta+2k\pi}{2}=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

练 习

1. 求证：

（1） $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$；

（2） $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

2. 求证：

（1） $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$；

（2） $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$；

（3） $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$.

3. 将函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 化成 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0)$ 的形式.

习题 3

学而时习之

运用下列公式解题：

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].$$

1. 化简：

（1）$\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\dfrac{1}{2}\sin\alpha$；

（2）$2\cos(x-y)\cos y-\cos(x-2y)$.

2. 求值：

（1）$\sin 20^\circ+\sin 40^\circ-\cos 10^\circ$；

（2）$\cos 40^\circ-\cos 20^\circ+\sin 10^\circ$.

温故而知新

3. 求函数 $y=\sin x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的最小值.

4. 求函数 $y=\sin x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的最大值.

5. 求下列函数的最大值：

（1）$y=\cos x-\sin x$；

（2）$y=\sqrt{3}\cos x-\sin x$.

数学建模

平面上的旋转

——问题的解决

利用和角公式可以研究平面上绕某一固定点的旋转问题.

在平面上建立直角坐标系，以旋转中心为原点.

平面上的图形都是由点组成的. 只要能够由每个点 P 的坐标 (x, y) 计算它旋转到的新的位置 $P'(x', y')$ 的坐标，就明确描述了这个旋转，并且能够知道每个图形旋转到哪里去了.

问题一 直角坐标平面上所有的点绕原点沿逆时针方向旋转直角，坐标系固定不变. 点 $P(x, y)$ 旋转到点 P'，求 P' 点的坐标.

问题二 直角坐标平面上所有的点绕原点旋转角 α，坐标系固定不变. 点 $P(x, y)$ 旋转到点 P'，求 P' 的坐标 (x', y').

设 $r=|OP|$，$\angle xOP=\theta\in[0, 2\pi)$，则 $(x, y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

模型 1：

问题一的解法一

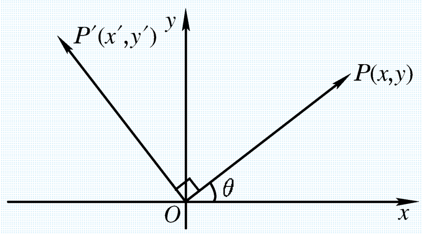


图 5-6

如图 5-6，由于 $\angle xOP=\theta$，OP 旋转直角到 OP'，故 $\angle xOP'=\theta+\frac{\pi}{2}$.

由 $\overrightarrow{OP}=(x, y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$，得

$$\overrightarrow{OP'}=\left(r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right), r\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$=(-r\sin\theta,\ r\cos\theta)=(-y,x)$.

故 $P(x,y)$绕原点逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$，转到 $P'(-y,x)$.

问题二的解法一

如图 5-7，由于$\angle xOP=\theta$，OP 旋转角 α 到 OP'，故$\angle xOP'=\theta+\alpha$.

由$\overrightarrow{OP}=(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$，

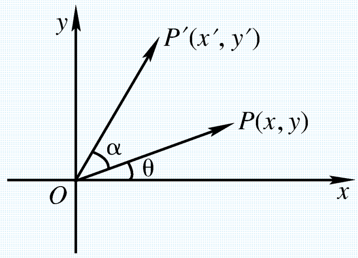


图 5-7

得

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OP'}&=(x',y')\\
&=(r\cos(\theta+\alpha),\ r\sin(\theta+\alpha))\\
&=(r\cos\theta\cos\alpha-r\sin\theta\sin\alpha,\\
&\quad r\sin\theta\cos\alpha+r\cos\theta\sin\alpha)\\
&=(x\cos\alpha-y\sin\alpha,\ y\cos\alpha+x\sin\alpha).
\end{aligned}
$$

于是，由 x，y 计算 x'，y'的公式为

$$
\begin{aligned}
x'&=x\cos\alpha-y\sin\alpha,\\
y'&=x\sin\alpha+y\cos\alpha.
\end{aligned}
$$

以上是利用诱导公式及和角公式解决了平面上的旋转问题．但平面上的旋转问题也可不用三角公式来解决，反而可以推出三角公式.

在数学建模中常常建立多种模型来解决同一个问题.

模型 2：

问题一的解法二

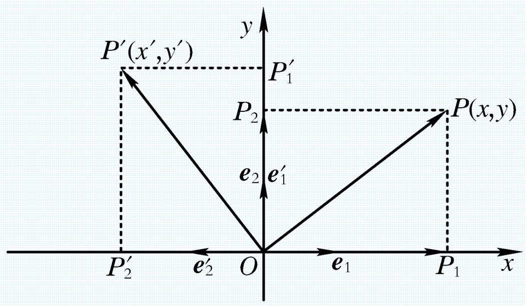


图 5-8

如图 5-8，设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 分别是 x 轴，y 轴正方向上的单位向量，则 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$. 设$\overrightarrow{OP_1}=x\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OP_2}=y\boldsymbol{e}_2$，则四边形 OP_1PP_2 是矩形.

设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{OP}$ 旋转直角后分别转到 $\boldsymbol{e}_1'$，$\boldsymbol{e}_2'$，$\overrightarrow{OP'}$，则矩形 OP_1PP_2 旋转到矩形 $OP_1'P'P_2'$.

由 $\overrightarrow{OP_1}=x\boldsymbol{e}_1$，知 $\overrightarrow{OP'_1}=x\boldsymbol{e}_1'$，由 $\overrightarrow{OP_2}=y\boldsymbol{e}_2$，知 $\overrightarrow{OP_2'}=y\boldsymbol{e}_2'$.

如果 $x=0$ 或 $y=0$，则四边形 OP_1PP_2 不是矩形而是一条线段或一个点，但仍有 $\overrightarrow{OP_1'}=xe_1'$，$\overrightarrow{OP_2'}=ye_2'$.

毛泽东诗云"坐地日行八万里"：地球转动，人也跟着转动．但人坐在地球上没有动，经度、纬度都不变．

本题中是"坐地转动 α"：整个平面就是"地球"，向量就是坐在"地球"上的"人"，线性组合系数（坐标）就是"经纬度"．平面转动了，向量跟着转动，线性组合系数不变．

由$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，就得出

$$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP_1'}+\overrightarrow{OP_2'}=x\boldsymbol{e}_1'+y\boldsymbol{e}_2'.$$

易见 $\boldsymbol{e}_1$ 转到 $\boldsymbol{e}_1'=\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_2$ 转到 $\boldsymbol{e}_2'=-\boldsymbol{e}_1$．于是$\overrightarrow{OP}$转到

$$\overrightarrow{OP'}=x\boldsymbol{e}_2+y(-\boldsymbol{e}_1)=-y\boldsymbol{e}_1+x\boldsymbol{e}_2=(-y,x).$$

这就得到公式

$$(x,y)\xrightarrow{\text{逆时针旋转直角}}(-y,x).$$

问题二的解法二

如图 5-9，设 x 轴，y 轴正方向上的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 旋转 α 后分别转到 $\boldsymbol{e}_1'$，$\boldsymbol{e}_2'$．与问题一的解法同理，可知

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$$

被转到 $\overrightarrow{OP'}=x\boldsymbol{e}_1'+y\boldsymbol{e}_2'$.

只需求出 $\boldsymbol{e}_1'$，$\boldsymbol{e}_2'$ 即可．

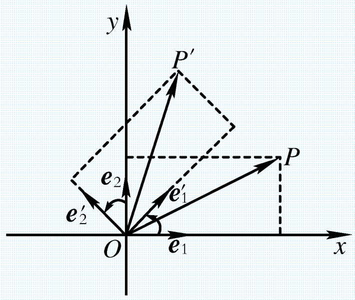


图 5-9

$\boldsymbol{e}_1'$ 是角 α 的终边上的单位向量，其坐标为$(\cos\alpha,\sin\alpha)$．将 $\boldsymbol{e}_1'$ 沿逆时针方向旋转直角就得到 $\boldsymbol{e}_2'$．由问题一，知 $\boldsymbol{e}_2'=(-\sin\alpha,\cos\alpha)$．于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP'}&=x(\cos\alpha,\sin\alpha)+y(-\sin\alpha,\cos\alpha)\\&=(x\cos\alpha-y\sin\alpha,x\sin\alpha+y\cos\alpha),\end{aligned}$$

$$(x,y)\xrightarrow{\text{逆时针旋转角 }\alpha}(x\cos\alpha-y\sin\alpha,x\sin\alpha+y\cos\alpha).$$

特别地，如果$|\overrightarrow{OP}|=1$，$\angle xOP=\theta$，则$(x,\ y)=(\cos\theta,\ \sin\theta)$，

$$\overrightarrow{OP'}=(\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha,\ \cos\theta\sin\alpha+\sin\theta\cos\alpha).\quad①$$

但另一方面，此时

$$\overrightarrow{OP'}=(\cos(\theta+\alpha),\ \sin(\theta+\alpha)).\quad②$$

比较①，②，得

$$\sin(\theta+\alpha)=\cos\theta\sin\alpha+\sin\theta\cos\alpha,$$

$$\cos(\theta+\alpha)=\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha.$$

这就得出了正弦、余弦的和角公式．

可见，和角公式与平面上的旋转密切相关．可以说平面上的旋转是和角公式的几何背景．

数学实验

光的干涉

在物理学中，为了验证光的波动性，设计了如下的双缝实验来研究光的干涉现象. 如图 5-10 所示，在单色平行光的前方放有一狭缝 S，S 前又放有两条平行狭缝 S_1 和 S_2，都与 S 平行且距离相等. S 发出的光经过 S_1 和 S_2 后可以看成从 S_1，S_2 发出的两束光，它们的振动频率相同、振动方向相同. 在 S_1，S_2 的前方放置屏幕 yy'，则 S_1，S_2 发出的两束光在屏幕上每一点叠加，产生干涉现象.

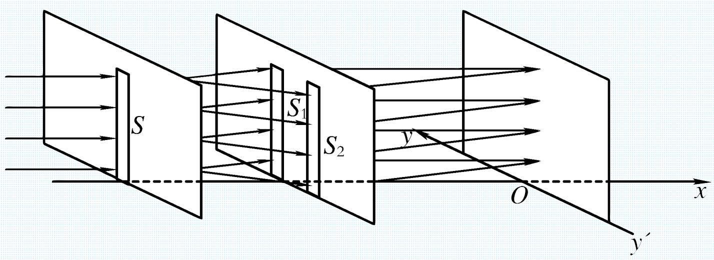


图 5-10

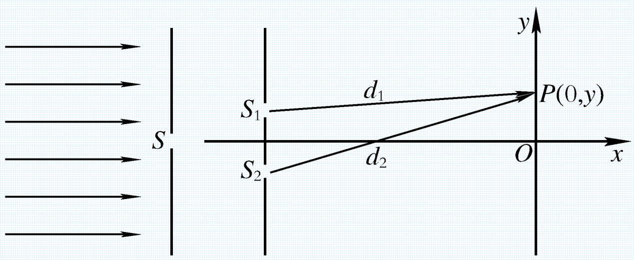


图 5-11

不妨只在垂直于狭缝和屏幕的平面上考虑问题. 将 S_1，S_2 看成两个点，屏幕 yy' 看成一条直线. 在这个平面内建立直角坐标系，使 yy' 是 y 轴，S_1，S_2 的垂直平分线为 x 轴. S_1，S_2 的坐标分别是 $(-a, h)$，$(-a, -h)$，这里 a 是 S_1，S_2 到屏幕的距离，

$2h$ 是 S_1，S_2 之间的距离．我们来研究 y 轴上任一点 $P(0,y)$ 受到照射之后的亮度与 y 之间的关系．

光源 S_1，S_2 在每个时刻 t 对点 $P(0,y)$ 的照射可以用光振动函数 $E=A\sin 2\pi\left(ft+\dfrac{d}{\lambda}\right)$ 来描述，其中振幅 A 代表光的强度，f 是光的频率（很大），d 是光源到点 P 的距离，λ 是光的波长（很小）．点光源 S_1，S_2 到 P 的距离分别是

$$d_1=\sqrt{a^2+(y-h)^2},\quad d_2=\sqrt{a^2+(y+h)^2}.$$

于是点 P 的光振动函数为

$$E=A\sin 2\pi\left(ft+\frac{d_1}{\lambda}\right)+A\sin 2\pi\left(ft+\frac{d_2}{\lambda}\right). \tag{①}$$

利用和差化积的公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

可将①化为

$$E=2A\sin 2\pi\left(ft+\frac{d_1+d_2}{2\lambda}\right)\cos\frac{\pi(d_1-d_2)}{\lambda},$$

即

$$E=B\sin 2\pi\left(ft+\frac{d_1+d_2}{2\lambda}\right) \tag{②}$$

的形式，其中

$$B=2A\cos\frac{\pi(d_1-d_2)}{\lambda} \tag{③}$$

是与时间 t 无关的常数．

点 P 的光振动函数 $E=B\sin 2\pi\left(ft+\dfrac{d_1+d_2}{2\lambda}\right)$，当 $B\neq 0$ 时仍是一个正弦型函数，$|B|$ 是它的振幅，B^2 的大小反映了这一点 P 在光的照射下的亮度．

$|B|$ 的大小主要由 P 到两个光源的距离的差 d_1-d_2 决定：

当 d_1-d_2 是 λ 的整数倍时，$\left|\cos\dfrac{\pi(d_1-d_2)}{\lambda}\right|=|\cos k\pi|=1$ $(k\in\mathbf{Z})$，$|B|=2A$ 最大，这样的点 P 最亮；

当 $\dfrac{d_1-d_2}{\lambda}$ 是整数 k 加 $\dfrac{1}{2}$ 时，$\left|\cos\dfrac{\pi(d_1-d_2)}{\lambda}\right|=\left|\cos\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|=0$ $(k\in\mathbf{Z})$，这样的点 P 亮度为 0，最暗．

随着 y 的变化，$\dfrac{d_1-d_2}{\lambda}$ 在整数值与整数值加 $\dfrac{1}{2}$ 之间连续变化，光

屏上由 P 所代表的线条的亮度就在最亮和最暗之间连续变化，放置在 y 轴上的光屏上就呈现出明暗相间的条纹，这就是反映光的干涉的条纹. 对每个 y 值，可由公式

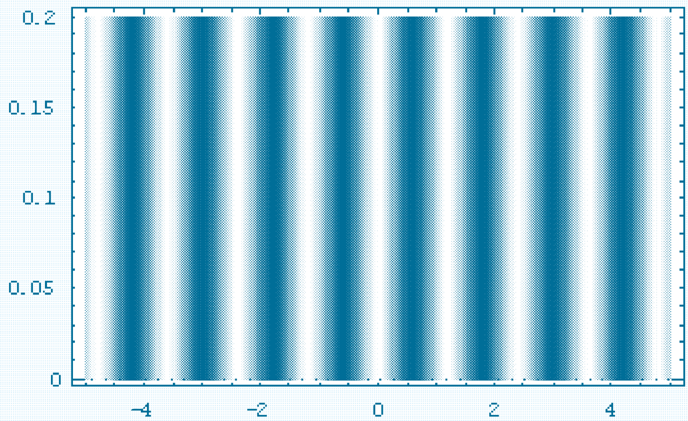
$$d_1-d_2=\sqrt{a^2+(y-h)^2}-\sqrt{a^2+(y+h)^2}$$

和

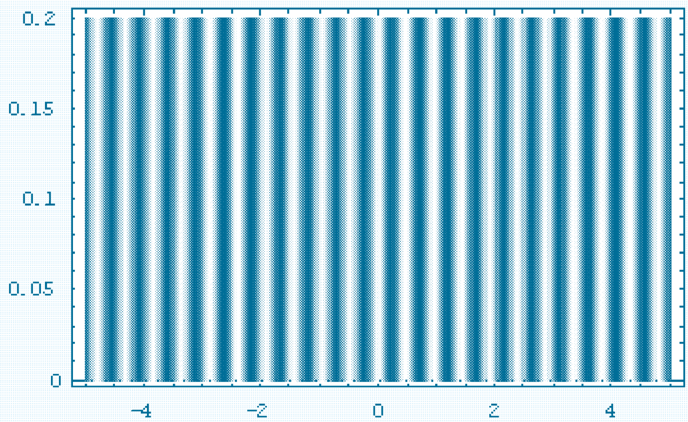
$$B^2=4A^2\cos^2\frac{\pi(d_1-d_2)}{\lambda}$$

计算出点 $P(0,y)$ 的 B^2 值. 利用计算机软件中的“灰度函数”，按 B^2 的大小对于光屏上对应于 $P(0,y)$ 的线条附近进行明暗着色：B^2 越大就越亮，B^2 越小就越暗.

图 5-12(a)，(b)是对 λ,h,a 的两组不同值用计算机模拟的光的干涉条纹.



(a)



(b)

图 5-12

小结与复习

一、指导思想

三角恒等变换公式反映了角的相加、相减、二倍角运算引起三角函数值变化的规律，是研究三角函数性质及其应用的一种工具．学习和应用三角恒等变换，有利于发展推理能力和运算能力．

三角恒等变换具有几何和物理的应用背景．以向量为桥梁将三角恒等变换的算式与直观的几何图形相互沟通和转化，有助于学习和应用三角恒等变换，还能提高学习数学的兴趣，体会数学是一个有机联系的整体，而不是各不相关的内容的堆积．

二、内容提要

1．本章利用向量的数量积推导出两角差的余弦公式，并由此公式推导出两角和与差的正弦、余弦、正切公式，二倍角的正弦、余弦、正切公式．

2．本章主要公式：

和(差)角公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}.$$

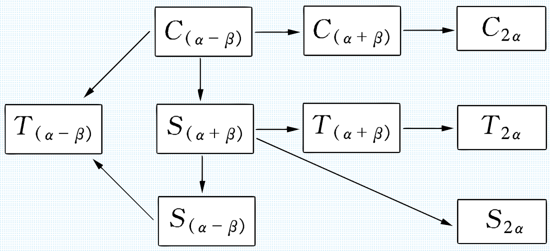
倍角公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha,$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

3．本章主要公式的内在联系：



三、学习要求和需要注意的问题

1. 学习要求：

(1) 掌握两角和与差的正弦、余弦、正切公式；掌握二倍角的正弦、余弦、正切公式；通过公式的推导，了解它们的内在联系，从而培养逻辑推理能力.

(2) 能正确运用三角公式，进行简单的三角函数式的化简、求值、恒等式证明（包括引出积化和差、和差化积、半角公式，但不要求记忆）.

2. 需要注意的问题：

(1) 在三角函数化简和三角恒等式的证明时，要细心地观察题目的特征，灵活、恰当地选用公式.

(2) 证明三角恒等式的常用方法为：①从一边开始证得它等于另一边，一般由繁化简；②证明左、右两边都等于同一个式子（或值）.

(3) 在解题中，要注意角的恒等变换，如已知 $\alpha+\frac{\pi}{4}$ 的三角函数值，求 α 的某些三角函数值时，可将 α 表示为 $\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}$ 的形式.

四、参考例题

例 1 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{12}{13}$，$\frac{\pi}{4}-\alpha$ 是第一象限角. 求 $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$ 的值.

解 由于$\frac{\pi}{4}-\alpha$是第一象限角，

所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}.$

于是 $$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{10}{13}.$$

例 2 已知 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{2}{3}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{5}$，求 $\tan\alpha\tan\beta$ 的值.

解法一 由已知条件及余弦的和（差）角公式，得

$$\begin{cases}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{2}{3},\\ \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{5}.\end{cases}$$

所以 $$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}{2}=\frac{13}{30},$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\frac{1}{5}-\frac{2}{3}}{2}=-\frac{7}{30}.$$

从而 $$\tan\alpha\tan\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=-\frac{7}{13}.$$

解法二

$$\tan\alpha\tan\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]}{\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)}{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)}=-\frac{7}{13}.$$

复 习 题 五

学而时习之

1. 已知 $\tan\alpha=2$，$\tan(\alpha-\beta)=5$，求 $\tan\beta$ 的值.

2. 已知 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，$\tan\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}$，求 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

3. 求值：$\frac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}$.

4. 化简：$\frac{\sqrt{1-\sin 20^\circ}}{\cos 10^\circ-\sqrt{1-\cos^2 190^\circ}}$.

5. 已知 α，β 均为锐角，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$. 求证：$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

温故而知新

6. 已知 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$，且 $\alpha+\frac{\pi}{4}$ 是第一象限角，试求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的值.

7. 已知电流 $i=i_m\sin\omega t$，电压 $V=V_m\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$，求证：电功率 $P=iV=\frac{1}{2}V_m i_m\sin 2\omega t$.

8. 化简：$\sin 50^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)$.

9. 化简：$\frac{\cos 2\alpha}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$.

10. 已知函数 $y=\sin^2 x+\sin 2x+3\cos^2 x$，$x\in\mathbf{R}$，问：

    (1) 函数的最小正周期是什么？

    (2) 函数的值域是什么？

    (3) 函数的图象可以由函数 $y=\sqrt{2}\sin 2x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象经过怎样的变换得出？

11. 在 Rt△ABC 中，斜边 AB 的长为 2. 求：

$\triangle ABC$ 的面积 S 的最大值.

12. 用一块长、宽分别为 3 m，2 m 的矩形木板，木板的一组对边紧贴在垂直于地面的墙角（两个墙面垂直）的两个面上，围出一个直棱柱形的谷仓，试问应怎样围才能使谷仓的容积最大？并求出谷仓容积的最大值.

13*. n 是正整数，$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha\neq 0$.

化简：$\dfrac{\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin n\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha}$.

上下而求索

轴　对　称

在平面上建立直角坐标系．设直线 l 由 x 轴绕原点沿逆时针方向旋转角 α 得到，试研究平面上的点关于 l 的轴对称变换．建议研究以下问题：

（1）如图 5－13(a)，设平面上点 $P(x,y)$关于 l 的对称点是 $P'(x',y')$. 怎样由 x,y,α 求 x',y'?（提示：参考“数学建模：平面上的旋转——问题的解决”的方法，将(x,y)写成（$r\cos\theta,r\sin\theta$）的形式，考虑经过轴对称变换之后角 θ 的变化.）

（2）如图 5－13(b)，设平面上有两条过原点的直线 l，m，相互夹角为 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. 设任一点 P 关于 l 的对称点为点 P_1，点 P_1 关于 m 的对称点为点 P_2．从点 P 到点 P_2 的变换是轴对称还是旋转变换？

还可以自己设计相关问题进行研究.

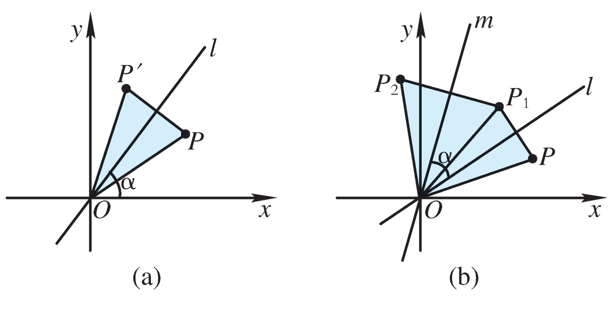


图 5–13

附　录

部分数学词汇中英文对照表

（按词汇所在页码的先后排序）

中文名	英　文　名	页　码
度	degree	2
角度制	degree measure	2
平角	straight angle	2
直角	right angle	3
单位圆	unit disk	8
弧度	radian	8
弧度制	radian measure	8
正弦	sine	15
余弦	cosine	15
正切	tangent	15
余切	cotangent	15
正割	secant	15
余割	cosecant	15
正弦线	sine line	18
余弦线	cosine line	18
有向线段	directed line segment	18
正切线	tangent line	19
诱导公式	induction formula	26
正弦曲线	sine curve	31
正切曲线	tangent curve	34
周期函数	periodic function	38
周期	period	38
最小正周期	minimal positive period	38